O177.43
H52

大学数学教材

泛函分析

胡适耕　编著





CHEP
高等教育出版社



Springer
施普林格出版社

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析/胡适耕 编著 .—北京:高等教育出版社;
海德堡:施普林格出版社,2001.8
高等学校教材
ISBN 7-04-010295-1

Ⅰ.泛… Ⅱ.胡… Ⅲ.泛函分析 Ⅳ.O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 050281 号

责任编辑:徐　可　**封面设计**:王凌波
版式设计:杨　明　**责任印制**:陈伟光

泛函分析
胡适耕 编著

出版发行	高等教育出版社　施普林格出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	**邮政编码**	100009
电　　话	010　64054588	**传　　真**	010-64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京民族印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2001 年 8 月第 1 版
印　　张	13.5	**印　　次**	2001 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	240 000	**定　　价**	18.00 元

© China Higher Education Press Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2001

版权所有　侵权必究

前　　言

面对本书的读者,在不及细看之前,想必会暗自猜度:"泛函分析"是"数学分析"的延续吗?

当然你已经学过"数学分析",而且也学过密切联系于数学分析的"实变函数"、"复变函数"等课程,它们涉及的内容大体上成熟于19世纪,至迟到20世纪初,今天被归并于**经典分析**这一名称之下.经典分析的全部结果基于一个实质上很简单的思想:如果某个量难以被直接了解,那么就将它放在某个变化过程中考虑,然后通过对该过程的考察获得所求量的知识.因此,变量、函数、极限、连续性及由此派生的微分与积分等,构成经典分析的基本概念.

一个形式上类似但层次更高的问题是:如果某个**变量**(如函数 $y = y(x)$)本身难以被直接了解——情况往往如此,那么,能否转而研究一族**变动的变量**,然后通过施于变量的一定运算与极限过程,获得有关原变量的知识?从逻辑上看,这种考虑自然导致对"变量的变量"或"函数的函数"的研究,而这就进入了本书所要介绍的"泛函分析"领域.

由此可见,在逻辑上,泛函分析原不过是经典分析的自然延伸.而从历史发展来看,泛函分析的胚胎早已孕育于经典分析的躯体中.远在经典分析的初创时期,对变分问题的研究已导致考虑泛函的极值.在数值分析中逐步成熟且广泛使用的逼近方法,愈来愈具有某种一般的特征,以至在一定算子理论框架下的统一处理成为不可避免.类似的趋势更明显地出现于范围广泛的数学物理问题中.到19世纪末,主要由微分方程与积分方程的研究所激发的"函数空间"与"连续变换"概念已经呼之欲出.来自各个领域的问题及解决方法所呈现的惊人类似性,有力地预示着新的综合不可避免.这一综合在20世纪初终于由Fréchet,Riesz及Banach等人提出,泛函分析因此而诞生.

如果说,经典分析只是在走过很长一段路程之后,作为其逻辑基础的实数理论才得以奠定,那么,泛函分析一开始就建立在无限维空间的严格理论基础之上.无疑,这应当归功于19世纪获得重视并趋于成熟的公理化方法,Hilbert的《几何基础》乃是开启公理化时代的典范之作.简单地说,公理化方法将一庞大的理论大厦奠立于少数几个公理构成的基石上,公理的力量则源于人类经验的广泛背景.读者在学习初等几何时已初步体会过公理法的效果,而泛函分析课程将提供更

系统的训练.

读者在学习这门课程之初,大概首先会注意到它与经典分析的类似性,试图循着极限、连续性这样熟悉的线索理解泛函分析的内容.这一想法应当得到适当的鼓励.通过与熟知事物的类比来了解新事物,常常是认知的有效方法.而且,正是函数空间与Euclid空间的高度类似,大大激发了泛函分析的早期作者开拓新理论的热情.即使在今天,适当的类比仍然是新思想的源泉.不过,读者在作这种类比时不可走得太远.你会很快发现,无限维空间中的分析学具有许多本质上全新的特征,它们远非有限维问题所能比拟.你完全不应为此而烦恼,因唯其如此,你所学到的才真正是一门新的知识,而不是一门老课程的平行重复.

关于本书的结构与风格,需作些说明.无庸讳言,本书沿袭了作者早两年所著《实变函数》一书的指导思想.一个基本的想法是,你不可能从一门课程中彻底学到所需的一切;为了真正学到一点东西,你必须忽略许多较次要的材料.本书尽了最大努力来突出那些体现泛函分析基本特征的思想,简化或回避了一些复杂的构造,尽可能降低难度,提高可读性.对于主要概念与结果的背景与实质,作了尽可能透彻的说明.所有基本结论的证明,都作了尽可能的简化.经简化后仍很繁冗的证明,则移入各章最后一节,使对之不感兴趣的读者便于跳过它们.这样做完全不影响对泛函分析核心内容的理解与掌握.对于不可省略的证明,则较详细地给出细节,以便读者自学.不过,作者并不认为应将所有细节包罗无遗.凡需要读者自己思考的地方,本书有意作了省略.当读者见了“请自证”或“何故?”之类的字样时,倘能独立解决,而不是浑然而过,必能收到非同寻常的效果.

本书准备了较多的习题(共300道).其中习题A是基本的,凡希望较好理解本书核心内容的读者务必完成其中一部分.习题B是留给力有余裕的读者的;利用本书后面的提示,解决这些问题并无太大的困难,而一旦解题成功你将获益匪浅且兴趣培增.

作者希望本书能为不同类型的学校与不同需要的读者所用——从仅需最基本的材料到需要稍深入的知识之间的几个层次.这一意图自然决定了本书的选材与总体构思.使用本书作为教材时,可依几种方式组合书中的材料.若选用§§1.1~1.7,§§2.1~2.5,§2.7,§2.9,§§3.1~3.5,§§4.1~4.3,则需44学时左右;若加上§2.6,§2.8,§3.6(目录中这些节打了*号),则需50学时左右;讲完全部内容(即再加上目录中打Δ号的节)至多70学时.对于内容的取舍,使用本书的教师是最权威的;他们富有创意的运用,将是对作者个人经验极有益的补充与修正,这正是作者所期待的.

胡适耕

2001年8月于武汉

记号与约定

A^c:集 A 的补.

A°:集 A 的内部.

$\bar{A}$:集 A 的闭包.

$A^\perp$:集 A 的正交补或零化子.

$B_r(a) = B(a,r)$:以 a 为心以 r 为半径的开球.

$\bar{B}_r(a) = \bar{B}(a,r)$:以 a 为心以 r 为半径的闭球.

$B(\Omega)$:Ω 上的有界函数之集.

$\mathbf{C}$:复数域.

$C(A,B)$:从 A 到 B 的连续映射之全体;$C(A) = C(A,\mathbf{R})$ 或 $C(A,\mathbf{C})$.

$\mathrm{CL}(X,Y)$:从 X 到 Y 的紧线性算子之全体;$\mathrm{CL}(X) = \mathrm{CL}(X,X)$.

$D_r(a) = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda - a| < r\}$;$\bar{D}_r(a) = \overline{D_r(a)}$.

$d(A,B)$:集 A,B 之间的距离;$d(x,B) = d(\{x\},B)$.

$\mathrm{diam}A$:集 A 的直径.

$\dim X$:空间 X 的维数.

$\{e_i\}$:未加说明时表 $\mathbf{R}^n$ 或 l^p 的标准基.

$\mathrm{GL}(X)$:X 上的拓扑自同构之全体.

I:单位算子.

$\mathbf{K} = \mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$.

$\mathbf{K}^{m \times n}$:$\mathbf{K}$ 上 $m \times n$ 阶矩阵之全体.

L^p:p 次可积函数空间,$1 \leqslant p < \infty$.

L^∞:本性有界函数空间.

$\mathrm{Lip}F$:算子 F 的 Lipschitz 模数.

$L(X,Y)$:从 X 到 Y 的有界线性算子之全体;$L(X) = L(X,X)$.

m:Lebesgue 测度.

$\mathbf{N}$:自然数集.

$N(T)$:算子 T 的零空间.

$\mathbf{Q}$:有理数集.

$\mathbf{R}$:实数集;$\mathbf{R}_+ = [0,\infty)$.

$R(T)$:算子 T 的值域.

$R_\lambda = R(\lambda, T)$:算子 T 的预解式.

$r_\sigma(T)$:算子 T 的谱半径.

$\rho(T)$:算子 T 的预解集.

$S_r(a)$:以 a 为心以 r 为半径的球面.

$\mathrm{span}A$:集 A 生成的向量空间.

$\sigma(T)$:算子 T 的谱.

$\sigma_c(T)$:算子 T 的连续谱.

$\sigma_p(T)$:算子 T 的点谱.

$\sigma_r(T)$:算子 T 的剩余谱.

T:通常表线性算子.

T^*:算子 T 的对偶算子或相伴算子.

$V_a^b(u)$:函数 u 在$[a,b]$上的全变差.

X, Y, Z:未加说明时表赋范空间.

X^*:空间 X 的对偶.

$\mathbf{Z}$:整数集;$\mathbf{Z}_+ = \{n \in \mathbf{Z}; n \geqslant 0\}$.

χ_A:集 A 的特征函数.

$\triangleq$:定义为.

$\square$:定理或命题证毕.

几点说明

1. 引证　§1.1(1) 表示 §1.1 中式(1);1.1.1(i) 表示定理(或命题、定义)1.1.1 之(i);[1,p.1] 表示参考文献[1] 中第 1 页.

2. 指标用法　不致误解时,出现于 $\sum$, $\prod$, $\cup$, $\cap$ 下的指标予以省略.未加说明时,下标 n 为自然数[①]. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 依情况可写成:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n \in \mathbf{N}} a_n, \sum_{1}^{\infty} a_n, \sum_{n} a_n \text{ 或} \sum a_n.$$

$\prod a_n$, $\cup A_n$ 等仿此. $\cup A_n$ 总可看作无限可数并(必要时加入一些空集项); $\cap A_n$ 仿此.给定 $x \in \mathbf{R}^n$, $f: D \to \mathbf{R}^n$,自动认定 $x = (x_i)$, $f = (f_i)(1 \leqslant i \leqslant n)$. 给定 $x \in l^p$,认定 $x = (x_i) = (x_1, x_2, \cdots)$.

3. 极限符号　$\lim\limits_{n} x_n$ 与 $\lim\limits_{m,n} x_{mn}$ 分别表 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ 与 $\lim\limits_{m,n \to \infty} x_{mn}$; $\lim\limits_{t \downarrow 0} \varphi(t) = \lim\limits_{0 < t \to 0} \varphi(t)$; $\rightrightarrows$ 记一致收敛; $\rightharpoonup$ 与 $\overset{*}{\rightharpoonup}$ 分别记弱收敛与弱* 收敛.

4. 范数记号　不致混淆时,空间 $X, Y, X^*, L(X, Y)$ 等中的范数皆记作 $\|\cdot\|$; $\|\cdot\|_p$ 记 L^p 范数; $\|\cdot\|_0$ 记 sup 范数; $|\cdot|$ 记 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$ 中的 Euclid 范数(即模长).

5. 零记号　数零,零向量,零算子,零泛函等都记作 0.

6. 不等号的用法　对 $A, B \subset \mathbf{R}$,约定 $A < B \Leftrightarrow \forall a \in A, b \in B: a < b$; $A \leqslant B, a \leqslant B$ 等仿此.对 $f, g: D \to \mathbf{R}$,约定 $f < g \Leftrightarrow \forall x \in D: f(x) < g(x)$; $f \leqslant g$ 仿此; $f(A) < f(B) \Leftrightarrow \forall a \in A, \forall b \in B: f(a) < f(b)$.

7. 集记号　$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, $A + x$ 仿此;
$MA = \{\mu a : \mu \in M, a \in A\}$, αA, $-A$ 仿此;
$\langle F, A \rangle = \{\langle f, a \rangle : f \in F, a \in A\}$, $\langle F, x \rangle$ 仿此.

8. 上下确界　设 $A \subset \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$. 若 A 上方无界或 $\infty \in A$,则约定 $\sup A = \infty$; 若 A 下方无界或 $-\infty \in A$,则约定 $\inf A = -\infty$. ∞ 总指 $+\infty$.

9. const 的用法　当 const 出现在式子中时,它表示某个常数,其具体数值难以或不必明确写出.

---

① 注:本书中的"自然数"即正整数,记号为 $\mathbf{N}$.

10. 映射记号 $F:D\subset X\to Y$ 表示映射 $F:D\to Y$，D 是 X 的子集；$\varphi(x,y)$ 看作 x 的函数时记作 $\varphi(\cdot,y)$，$\cdot$ 用来代替自变量.

关于习题的说明

1° 习题A中所列问题大多是对书中结论的直接应用，或为本书主要概念提供的释例，一般稍加思考即可顺利解答，它们对于完成本课程所要求的基本训练是必不可少的.

2° 习题B包含了一些稍难的问题，它们是为有深入钻研兴趣且力有余裕的读者准备的. 但也有不少问题未必很难，只是所涉及的材料不关乎本书的核心内容，不宜放在习题A中. 特别，内容涉及打 *，Δ 号节的习题一般放在习题B中.

3° 考虑到使用本书的教师挑选习题的方便，每章的习题都是依据该章正文内容的顺序安排的.

4° 所有习题都表述得尽可能简略. 例如，证明题仅写出要证的结论，而省去“求证”之类的词；如非特别必要，也不解释题中出现的字母 X,Y,Λ,x 等的意义. 这将有助于训练读者的判断力，富于创意的学生应能独立讨论题设条件，甚至自编一些更好的题.

5° 书末所附的“习题答案与提示”虽然有些简略，但应当说已经够用. 须知，一份详细的习题解答对于读者并无益处. 如果读者在解答习题时并不急于查看书末的“答案与提示”，将会获得更大的收益.

序

泛函分析是一门很优美的数学，它的高度概括性、应用的广泛性以及表述形式的简洁性，常能激发善教者与善学者的赞美和喜悦. 记得40多年前我与我的同事们在吉林大学多次讲授这门数学时，都曾或多或少地有过这方面的体验及经验. 但在那个年代由于自己对泛函分析发展史所知甚少，以致不能也不敢在教学中论述有关题材内容思想方法的来龙去脉.

因此，当我看到胡适耕教授这本《泛函分析》教材时，就特别欣赏作为各章结尾的"评注". 这些评注是在透彻理解学科思想发展史的基础上写出来的，故能清晰地勾画出题材核心内容的基本思想及其发展轨迹. 显然这对初学者去理解内容实质和掌握方法思路极有帮助.

这本教材的另一重要特点，就是对习题的精心安排和区分A、B两类. 这样就给本课程讲授者和学习者留有教学安排上的选择余地和弹性.

此外，这本教材一开始就从"Banach空间"单刀直入，从而能带领学习者很快进入泛函分析的核心内容. 无疑这也是一种明智的安排.

综上所述，我认为此书是一本很有特色与创意的教材，相信将会在我国的泛函分析教学实践中，不断显示其功效. 当然，教学实践又必将会产生新知与启示，能成为此书将来再版时改进的依据.

徐利治

2001.06.18于北京寓所

目　　录

记号与约定 …… (VII)
几点说明 …… (IX)
第一章　Banach 空间 …… (1)
§1.1　赋范空间及其完备性 …… (1)
§1.2　函数空间 …… (6)
§1.3　点集 …… (11)
§1.4　映射与连续性 …… (15)
§1.5　紧性 …… (18)
§1.6　纲定理 …… (22)
§1.7　Hilbert 空间 …… (25)
△§1.8　度量空间与拓扑空间 …… (31)
△§1.9　某些结论的证明 …… (35)
评注 …… (38)
习题 …… (41)
第二章　线性算子与线性泛函 …… (44)
§2.1　有界线性算子 …… (44)
§2.2　矩阵·积分算子 …… (48)
§2.3　基本定理 …… (52)
§2.4　对偶空间 …… (57)
§2.5　Hahn-Banach 定理 …… (63)
*§2.6　分离定理 …… (68)
§2.7　弱收敛 …… (74)
*§2.8　对偶算子 …… (79)
§2.9　紧线性算子 …… (82)
△§2.10　某些结论的证明及补充 …… (85)
评注 …… (92)
习题 …… (96)

第三章 谱论初步 …… (100)
§3.1 有界线性算子的谱 …… (100)
§3.2 算子函数 …… (105)
§3.3 谱分解 …… (111)
§3.4 紧线性算子的谱 …… (117)
§3.5 Hilbert 空间上的有界线性算子 …… (122)
*§3.6 自伴算子的谱 …… (128)
△§3.7 Hilbert 空间中的无界算子 …… (137)
△§3.8 某些结论的证明及补充 …… (141)
评注 …… (146)
习题 …… (150)
第四章 非线性算子 …… (153)
§4.1 压缩算子 …… (153)
§4.2 导算子 …… (159)
§4.3 隐函数定理 …… (165)
△§4.4 紧算子 …… (168)
△§4.5 单调算子 …… (174)
评注 …… (181)
习题 …… (183)
参考书目 …… (187)
习题答案与提示 …… (188)
名词索引 …… (199)

第一章　Banach 空间

用一种比拟的说法,可将泛函分析界定为“无限维空间上的分析学”;若更特殊点,就是“Banach 空间上的分析学”. 于此可见,Banach 空间对于泛函分析之意义,恰如 Euclid 空间对于经典分析之意义. 因此,关于 Banach 空间基本理论的初步介绍,自然地构成本书的第一章,读者不妨将它与数学分析中的实数理论相对照.

§1.1　赋范空间及其完备性

让我们回顾一下熟知的 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$,它由所有形如 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的 n 个实数的有序组构成,通常将 x 简写作 (x_i). $\mathbf{R}^n$ 依运算

$$\alpha(x_i)+\beta(y_i)=(\alpha x_i+\beta y_i)$$

是一个 n 维实向量空间. 每个向量 $x\in\mathbf{R}^n$ 依公式

$$|x|=\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\Big)^{1/2} \tag{1}$$

计算其**模长**. $|x|$ 也称为 **Euclid 范数**,它具有直观上显明的性质:

(i) $|\alpha x|=|\alpha|\,|x|$;

(ii) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$;

(iii) $|x|\geqslant 0$; $|x|=0\Leftrightarrow x=0$($\mathbf{R}^n$ 的零元),

以上 $x,y\in\mathbf{R}^n$, $\alpha\in\mathbf{R}$. 若 $\{x^{(k)}\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中一序列, $x\in\mathbf{R}^n$,则

$$x^{(k)}\to x\Leftrightarrow|x^{(k)}-x|\to 0\,(k\to\infty). \tag{2}$$

一个有重大意义的事实是: $\mathbf{R}^n$ 中的极限论及基于极限概念的分析理论的许多结果,仅依赖于式(2) 与模长性质(i) ~ (iii),而与模长的定义式(1) 无关,因而实际上并不依赖于 Euclid 空间的特殊构造. 这就启示出:若某个向量空间上定义了一种类似于模长的概念,它具有性质(i) ~ (iii),则依式(2) 定义极限之后,就可将 Euclid 空间中那些仅依赖于性质(i) ~ (iii) 的概念与结论直接推广于该空间,从而得到经典分析的一个具有广阔发展余地的拓广. 以上想法引向赋范空间概念,它的严格定义在逻辑上是很简单的:

1.1.1 定义　设 X 是数域 $\mathbf{K}(=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$,本书皆如此) 上的向量空间[①]. 若对

---

① 即线性空间,有关的概念可参看任何一本线性代数教科书.

每个 $x \in X$，指定了一个实数 $\|x\|$，称为 x 的**范数**[①]，它满足以下**范数公理**：

(N_1) 齐次性：$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$；

(N_2) 三角不等式：$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$；

(N_3) 正定性：$\|x\| \geqslant 0$；$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(以上 $x, y \in X, \alpha \in \mathbf{K}$)，则称 X 为赋范向量空间，简称为**赋范空间**，当必要明确指出范数时写作$(X, \|\cdot\|)$. 若 $\mathbf{K} = \mathbf{R}$(或 $\mathbf{C}$)，则称 X 为实(或复)赋范空间.

依定义 1.1.1，$\mathbf{R}^n$ 就是一个实赋范空间，其中的范数即 Euclid 范数(1). 类似地，同一公式(1) 定义的范数使 $\mathbf{C}^n$ 成为复赋范空间. 今后以 $\mathbf{K}^n$ 泛指 $\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{C}^n$，它经常用作解释赋范空间概念的模型.

与特殊的Euclid范数不同，定义1.1.1中的范数 $\|x\|$ 并无具体计算公式. 初看起来，这似乎是一缺点. 实际上，这正是赋范空间概念的优点：本质的东西其实只是公理(N_1) ～ (N_3)，范数 $\|x\|$ 的具体界定正是要舍弃的.

以下设 X 是一个给定的赋范空间.

我们将大量借用通常的几何术语，以加强与平常 Euclid 空间的类比. 例如，X 中的元称为点或向量，向量 x 亦解释为从点 0 到点 x 的有向线段(图 1 - 1)，而 $\|x\|$ 即其“长度”. 三角不等式无非是说：三角形一边之长不超过另两边长之和. 如同在 $\mathbf{R}^n$ 中一样，由公理(N_2) 易推出：

$$\left\|\sum_1^n x_i\right\| \leqslant \sum_1^n \|x_i\|; \tag{3}$$

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|. \tag{4}$$

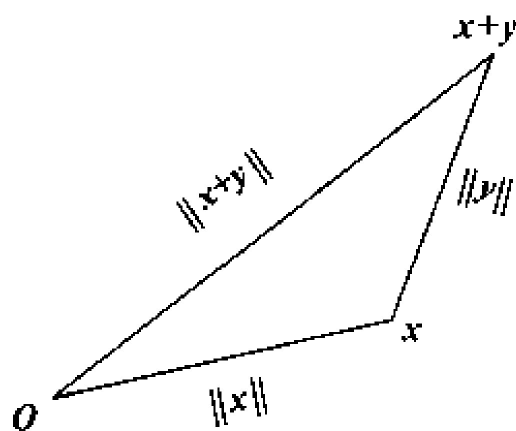


图 1 - 1

你应当能说出这两个不等式的几何意义. 对任给 $x, y \in X$，称 $\|x - y\|$ 为点 x 与 y 之间的距离，也记作 $d(x, y)$. 更一般地，对任给 $A, B \subset X$，定义 A 与 B 之间的距离为

$$d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} \|a - b\|. \tag{5}$$

约定 $d(x, B) = d(\{x\}, B)$. 定义 A 的直径为

$$\operatorname{diam} A = \sup_{x, y \in A} \|x - y\|; \tag{6}$$

当 $\operatorname{diam} A < \infty$ 时称 A 为有界集.

有了距离，就可描述 X 中两点的接近程度，而这正是定义极限与连续性的基础. 设 $\{x_n\}$ 是 X 中一序列，$x \in X$. 几乎原封不动地套用 $\mathbf{R}^n$ 中的极限定义式(2)，规定在 X 中

---

① 范数一词，兼指特定向量 x 的范数与函数 $x \to \|x\|$. 今后引进的内积、度量等术语亦有类似的特点.

$$x_n \to x \Leftrightarrow \| x_n - x \| \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{7}$$

当 $x_n \to x$ 时,说序列$\{x_n\}$(依范数)收敛于极限 x,也写作

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \quad 或 \quad \lim_n x_n = x.$$

读者从数学分析课程中熟识的许多极限性质,如极限的唯一性及收敛序列的有界性、极限的运算性质等等,都可推广于赋范空间中的序列极限,且无需逐一重新论证,只需指明在 Euclid 空间中所述性质的证明仅用到模长性质(i)~(iii)(对应赋范空间中的(N_1)~(N_3))就够了. 试用一典型例子解释如下. 设在 X 中 $x_n \to x$,在 $\mathbf{K}$ 中 $\alpha_n \to \alpha (n \to \infty)$. 因$\{\alpha_n\}$必定有界,故有常数 $A > 0$,使$|\alpha_n| \leqslant A (\forall n \in \mathbf{N})$. 于是

$$\begin{aligned}
\| \alpha_n x_n - \alpha x \| &\leqslant \| \alpha_n x_n - \alpha_n x \| + \| \alpha_n x - \alpha x \| \quad (用(N_2)) \\
&= |\alpha_n| \| x_n - x \| + |\alpha_n - \alpha| \| x \| \quad (用(N_1)) \\
&\leqslant A \| x_n - x \| + |\alpha_n - \alpha| \| x \| \to 0 (n \to \infty),
\end{aligned}$$

可见 $\alpha_n x_n \to \alpha x$. 这就证明了:乘积的极限等于极限的乘积.

无穷级数概念亦可引进赋范空间:若 $x_n \in X (n = 1,2,\cdots)$,$s_n = \sum_1^n x_i$,$s_n \to x (n \to \infty)$,则说无穷级数$\sum x_n$ 收敛于 x,写作 $x = \sum x_n$. 若$\sum \| x_n \|$ 收敛,则说级数$\sum x_n$ **绝对收敛**.

至此,读者或许会认为赋范空间中的极限论原来很简单:无非照搬老的极限定理而已. 但你不可过分乐观,我们马上就要指出一个不能简单照搬的极限定理. 在经典分析中,最重要的定理无疑是:

Cauchy 收敛原理 数列$\{x_n\}$收敛的充要条件是

$$\lim_{m,n} | x_m - x_n | = 0, \tag{8}$$

即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m, n \geqslant N: | x_m - x_n | < \varepsilon.$$

然而,一般赋范空间中并没有类似的结果,因此需要以下定义.

1.1.2 定义 若赋范空间 X 中的序列$\{x_n\}$满足如下 **Cauchy 条件**

$$\lim_{m,n} \| x_m - x_n \| = 0 \tag{9}$$

(对照(8)!),则称$\{x_n\}$为 **Cauchy 列**. 若 X 中所有 Cauchy 列皆收敛,则说 X 是完备的,并称 X 为 **Banach 空间**.

直接看出,收敛序列必为 Cauchy 列;而 Banach 空间中的 Cauchy 列也是收敛序列. 因此可以说,Banach 空间正是使 **Cauchy 收敛原理成立的赋范空间**. 鉴于 Cauchy 收敛原理在经典分析中的重要性,不难理解,在泛函分析中通常使用 Banach空间,而不完备的赋范空间则不能完全满足需要.

Cauchy 收敛原理表明 $\mathbf{K}$ 是 Banach 空间. 进而容易推出 $\mathbf{K}^n$ 亦是 Banach 空

间. 下面考虑一个无限维 Banach 空间的例子.

1.1.3 例　设 Ω 是任一非空集, $B(\Omega)$ 是 Ω 上的有界实(或复)函数之全体,它显然是一个实(或复)向量空间. 任给 $u \in B(\Omega)$, 定义 u 的 **sup 范数**为

$$\| u \|_0 = \sup_{x \in \Omega} | u(x) |. \tag{10}$$

直接看出 $\| \cdot \|_0$ 满足范数公理$(N_1) \sim (N_3)$, 因此$(B(\Omega), \| \cdot \|_0)$ 是一个赋范空间. 设 $u, u_n \in B(\Omega)(n = 1,2,\cdots)$, 则

$$\| u_n - u \|_0 \to 0 \Leftrightarrow \lim_n \sup_{x \in \Omega} | u_n(x) - u(x) | = 0,$$

可见 $B(\Omega)$ 中依 sup 范数收敛就是一致收敛. 设$\{u_n\}$ 是 $B(\Omega)$ 中一 Cauchy 列, 则

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m, n \geqslant N, \forall x \in \Omega : | u_m(x) - u_n(x) | < \varepsilon. \tag{11}$$

固定 $x \in \Omega$, (11) 表明**数列**$\{u_n(x)\}$ 满足 Cauchy 条件, 因此有极限 $u(x)$. 在(11)中固定 $n \geqslant N$, 令 $m \to \infty$ 得

$$| u(x) - u_n(x) | \leqslant \varepsilon \quad (\forall x \in \Omega, n \geqslant N);$$

对 x 取上确界, 得

$$\| u - u_n \|_0 \leqslant \varepsilon \quad (\forall n \geqslant N).$$

这表明 $u = u_n + (u - u_n) \in B(\Omega)$ 且 $\| u_n - u \|_0 \to 0 (n \to \infty)$, 可见 $B(\Omega)$ 是一 Banach 空间.

若 A 是X 的向量子空间, 则 A 依X 中的范数同样为赋范空间; 若再假定 A 中任一收敛序列的极限属于 A, 则称 A 为X 的闭子空间(闭集的一般讨论见 §1.3). 以下简单命题是常用的.

1.1.4 命题　设 A 是赋范空间X 的子空间. 若 A 完备, 则它是 X 的闭子空间; 若 X 完备而A 为闭子空间, 则 A 亦完备. 因此, Banach 空间的子空间是 Banach 空间的充要条件是它为闭子空间.

证明是平凡的, 留作习题(题 2).

命题 1.1.4 常用来判定某些空间的完备性. 例如, 设 $J = [a,b](a < b)$, 显然 $C(J)$(J 上的连续函数之全体)是 $B(J)$ 的子空间. 若 $u, u_n \in C(J)(n = 1,2,\cdots)$, $\| u_n - u \|_0 \to 0$, 则 $u_n \rightrightarrows u$(一致收敛, 参看1.1.3), 于是由熟知的数学分析结果有 $u \in C(J)$. 可见 $C(J)$ 是 $B(J)$ 的闭子空间, 从而 $C(J)$ 亦为 Banach 空间.

在泛函分析中经常不免同时涉及几个赋范空间, 因而发生是否可互相替换的问题, 这引出以下定义:

1.1.5 定义　设 X, Y 是 **K** 上的两个赋范空间, 其中的范数都记作 $\| \cdot \|$[①].

① 今后概如此, 这并无混淆之虞, 因当写出某个范数 $\| x \|$ 时通常总可以从上下文判断出 x 属于哪个空间.

若存在线性同构[1] $T: X \to Y$ 与常数 $\alpha, \beta > 0$，使得

$$\alpha \| x \| \leqslant \| Tx \| \leqslant \beta \| x \| \quad (\forall x \in X), \tag{12}$$

则说 X 与 Y **拓扑同构**，并称 T 为从 X 到 Y 的一个拓扑同构；若 T 满足 $\| Tx \| = \| x \| (\forall x \in X)$，则称 T 为**等距同构**. 若 X 等距同构于 Y 的某个子空间 Y_0，则说 X **可等距嵌入** Y；若进而假定 Y 完备且每个 $y \in Y$ 是 Y_0 中某序列的极限，则说 Y 是 X 的**完备化**.

以 I 记 X 上的**单位算子**(或称恒等算子)，即 $Ix = x (\forall x \in X)$. 若 $\| \cdot \|$ 与 $\| \cdot \|'$ 是 X 上的两个范数，而

$$I: (X, \| \cdot \|) \to (X, \| \cdot \|')$$

为拓扑同构，这意味着存在 $\alpha, \beta > 0$，使得(对照(12))

$$\alpha \| x \| \leqslant \| x \|' \leqslant \beta \| x \| \quad (\forall x \in X),$$

则说 $\| \cdot \|$ 与 $\| \cdot \|'$ 是 X 上的**等价范数**.

由(12)直接推出：$\| x_n - x \| \to 0 \Leftrightarrow \| Tx_n - Tx \| \to 0 (n \to \infty)$. 因此，空间 X 中基于极限的所有结论通过拓扑同构 T 自然地过渡到空间 Y；或者说，就涉及极限的性质而言，互相拓扑同构的赋范空间实质上毫无区别，因而完全可互相替换. 相应地，对于所有基于极限的问题，同一空间上互相等价的范数是没有区别的. 至于互相等距同构的赋范空间，则在涉及距离的问题上亦无区别，因而可看作完全相同的赋范空间. 不过，互相拓扑同构的赋范空间形式上可能相差甚远，实际判定两个赋范空间是否拓扑同构往往不易. 但我们还是有以下重要结果.

1.1.6 定理 $\mathbf{K}$ 上的所有 $n(\in \mathbf{N})$ 维赋范空间互相拓扑同构.

证明放在 §1.9 中. 这个出色的定理的意义是显而易见的. 既然所有 n 维赋范空间互相拓扑同构，我们只需取其中之一作为标本研究就够了. 最简单的标本当然是 $\mathbf{K}^n$. 因 $\mathbf{K}^n$ 完备，故所有有限维赋范空间都是完备的；这又推出任何赋范空间的有线维子空间必是闭的(用 1.1.4). 其次，将定理 1.1.6 用到 $\mathbf{K}^n$ 得出，$\mathbf{K}^n$ 中任何范数必定互相等价. 例如，$\mathbf{R}^n$ 中的范数

$$| x |_1 = \sum_1^n | x_i |$$

必定等价于 Euclid 范数(1). 这些事实都是基本而常用的.

鉴于完备性的重要性，自然提出一个问题：赋范空间"一般地"是完备的吗？回答是否定的. 例如，由 1.1.4 推出，即使 X 是完备的，它的非闭子空间必定非完备. 粗略地说，不完备的空间中存在孔隙，使得有些 Cauchy 列的极限(它们本应存在)从这些孔隙中漏掉了，那么不完备空间能否"修补"成完备空间？回答是肯定的.

---

[1] 即保持线性运算的双射.

1.1.7 定理 任何赋范空间必存在完备化；一个赋范空间的所有完备化互相等距同构，因而本质上是唯一的.

这一重大结果的直接证明颇为繁琐，不拟给出. 在§2.5中我们将给出一个极简短的间接证明.

§1.2 函数空间

在泛函分析的应用中常见的Banach空间，大多以函数空间(包括序列空间)的形式出现. 其中最简单而又常用的是本节所述的两类空间：L^p空间与C^r函数空间，它们分属"坏函数"的空间与"好函数"的空间，二者在实际应用及其他函数空间的研究中均起基本作用.

以下设$J=[a,b]\subset\mathbf{R}, a<b, 1\leqslant p\leqslant\infty, p^{-1}+q^{-1}=1$，当$p=1$时$q=\infty$，当$p=\infty$时$q=1$. 以$m$记Lebesgue测度. 对$J$上任一可测函数$u(x)$，定义其$\boldsymbol{L^p}$**范数**为

$$\|u\|_p=\begin{cases}\left(\int_a^b|u|^p\mathrm{d}m\right)^{1/p}, & 1\leqslant p<\infty;\\ \inf\limits_{A\subset J, mA=0}\sup\limits_{x\notin A}|u(x)|, & p=\infty.\end{cases} \tag{1}$$

令

$$L^p(J)=\{u: u(\cdot)\text{是}J\text{上的可测函数且}\|u\|_p<\infty\}. \tag{2}$$

若$p<\infty$，则称$u\in L^p(J)$为$\boldsymbol{p}$**次可积函数**；而称$u\in L^\infty(J)$为**本性有界函数**. 若$u, u_n\in L^p(J)(n=1,2,\cdots)$，$\|u_n-u\|_p\to0(n\to\infty)$，则说序列$\{u_n\}$ $\boldsymbol{L^p}$**收敛于**u，记作$u_n\xrightarrow{L^p}u(n\to\infty)$. 当$p<\infty$时，$L^p$收敛也称为$\boldsymbol{p}$**次平均收敛**或$p$次平均逼近；1次平均收敛就简称为平均收敛. $u_n\xrightarrow{L^1}u(n\to\infty)$意味着曲线$u_n=u_n(x)$与$u=u(x)$所夹面积趋向于零(图1-2). 注意这不排除对某些

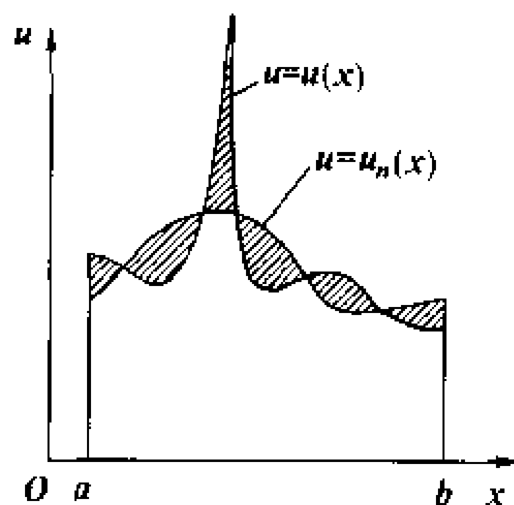


图1-2

x，$|u_n(x)-u(x)|$ 保持很大的值．因此 L^1 收敛与通常的"处处收敛"有很大差别．当 $1<p<\infty$ 时，L^p 收敛亦有类似的直观意义．

1.2.1 命题 若认定 J 上两个几乎处处相等的函数为同一元素，则 $L^p(J)$ 依 L^p 范数 $\|\cdot\|_p$ 是一 Banach 空间．

证 不妨设 $1<p<\infty$（$p=1,\infty$ 的情况更简单些，留给读者自证，见题6）．利用不等式

$$|u+v|^p\leqslant 2^p(|u|^p+|v|^p),$$

容易验证 $L^p(J)$ 是一向量空间．下面只需验证范数公理$(\mathrm{N}_1)\sim(\mathrm{N}_3)$及完备性条件(1.1.2)满足．

1° 验证范数公理．直接看出 $\|\cdot\|_p$ 满足(N_1)，(N_3)，因此只需验证(N_2)．为此首先建立以下不等式：

$$x^\alpha y^{1-\alpha}\leqslant \alpha x+(1-\alpha)y,0<\alpha<1,x,y\geqslant 0. \tag{3}$$

不妨设 $x>y$．固定 $y\geqslant 0$，令 $\varphi(x)=\alpha x+(1-\alpha)y-x^\alpha y^{1-\alpha}$，则

$$\varphi'(x)=\alpha[1-(y/x)^{1-\alpha}]>0(\forall x>y),$$

于是 $\varphi(x)\geqslant\varphi(y)=0$，这推出不等式(3)．

现在利用(3)来建立著名的 **Hölder 不等式**：

$$\|uv\|_1\leqslant\|u\|_p\|v\|_q,\quad u\in L^p(J),v\in L^q(J). \tag{4}$$

不妨设 $\|u\|_p\|v\|_q>0$（否则式(4)自动成立！），于是

$$\begin{aligned}\frac{\|uv\|_1}{\|u\|_p\|v\|_q}&=\int_a^b\frac{|uv|}{\|u\|_p\|v\|_q}\mathrm{d}m\\&=\int_a^b\left(\frac{|u|^p}{\|u\|_p^p}\right)^{1/p}\left(\frac{|v|^q}{\|v\|_q^q}\right)^{1/q}\mathrm{d}m\\&\leqslant\int_a^b\left(\frac{|u|^p}{p\|u\|_p^p}+\frac{|v|^q}{q\|v\|_q^q}\right)\mathrm{d}m\qquad(\text{用(3)})\\&=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\end{aligned}$$

这表明不等式(4)成立．

现在利用 Hölder 不等式来验证三角不等式．取定 $u,v\in L^p(J)$，有

$$\begin{aligned}\|u+v\|_p^p&=\int_a^b|u+v||u+v|^{p-1}\mathrm{d}m\\&\leqslant\int_a^b|u||u+v|^{p-1}\mathrm{d}m+\int_a^b|v||u+v|^{p-1}\mathrm{d}m\\&\leqslant(\|u\|_p+\|v\|_p)\||u+v|^{p-1}\|_q\quad(\text{用(4)})\\&=(\|u\|_p+\|v\|_p)\|u+v\|_p^{p/q},\quad(\text{用}(p-1)q=p)\end{aligned}$$

这推出 $\|u+v\|_p\leqslant\|u\|_p+\|v\|_p$．

2° 证完备性. 设 $\{u_n\}$ 是 $L^p(J)$ 中的 Cauchy 列, 即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m, n \geqslant N: \| u_m - u_n \|_p < \varepsilon. \tag{5}$$

取 $n_1 > 0$, 使得

$$\| u_n - u_{n_1} \|_p < 2^{-1} \quad (\forall n \geqslant n_1).$$

次取 $n_2 > n_1$, 使得

$$\| u_n - u_{n_2} \|_p < 2^{-2} \quad (\forall n \geqslant n_2).$$

如此继续, 得出递升的指标 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, 使得

$$\| u_n - u_{n_k} \|_p < 2^{-k} \quad (\forall n \geqslant n_k, k = 1, 2, \cdots). \tag{6}$$

令 $v_k = u_{n_{k+1}} - u_{n_k}$, $v = \sum_1^\infty |v_k|$. 由(6) 有 $\| v_k \|_p < 2^{-k}$, 于是

$$\begin{aligned}
\| v \|_p &= \left[\int_a^b \lim_n \left(\sum_1^n |v_k|\right)^p \mathrm{d}m\right]^{1/p} \\
&= \lim_n \left[\int_a^b \left(\sum_1^n |v_k|\right)^p \mathrm{d}m\right]^{1/p} \qquad (\text{用 Levi 定理}) \\
&= \lim_n \left\| \sum_1^n |v_k| \right\|_p \\
&\leqslant \lim_n \sum_1^n \| v_k \|_p \qquad (\text{用三角不等式}) \\
&\leqslant \sum_1^\infty 2^{-k} < \infty,
\end{aligned}$$

可见 $v \in L^p(J)$. 这推出 $v < \infty$, a.e., 即级数 $\sum v_k$ 在 J 上几乎处处绝对收敛, 从而 $\{u_{n_k}\}$ 几乎处处收敛. 设 $u_{n_k} \to u$, a.e. $(k \to \infty)$. 任给 $\varepsilon > 0$, 由(5) 有

$$\| u_n - u_{n_k} \|_p < \varepsilon. \quad (n, n_k \geqslant N)$$

由 Fatou 定理, 当 $n \geqslant N$ 时

$$\begin{aligned}
\| u_n - u \|_p^p &= \int_a^b \lim_k |u_n - u_{n_k}|^p \mathrm{d}m \\
&\leqslant \varliminf_k \| u_n - u_{n_k} \|_p^p \leqslant \varepsilon^p,
\end{aligned}$$

故得 $\| u_n - u \|_p \leqslant \varepsilon (\forall n \geqslant N)$. 这推出 $u = u_n + (u_n - u) \in L^p(J)$, 且 $\| u_n - u \|_p \to 0 (n \to \infty)$, 即 $u_n \xrightarrow{L^p} u$. 完备性得证. □

必须强调指出, 在 $L^p(J)$ 的完备性证明中, Lebesgue 积分理论起了关键作用, 而 Riemann 积分则不胜此任. 可以证明(见 §1.9):

1.2.2 命题 令 $R^1(J) = \{u : u(\cdot)$ 是 J 上的 Riemann 可积函数$\}$, 则 $R^1(J)$ 是 $L^1(J)$ 的非闭子空间, 因而是不完备的(参考命题1.1.4).

可以说，与 $R^1(J)$ 相比，$L^1(J)$ 具有更多的元素；那些附加的元素连续性较差[1]，正是这些"坏函数"的进入使得 $L^1(J)$ 获得了完备性. 在这一点上，读者不妨与引进无理数以获得完备的实数系进行对比.

下面转向"好函数"的空间 $C^r(J)(r \in \mathbf{Z}_+)$，它定义为

$$C^r(J) = \{u : u^{(k)} \in C(J)(0 \leqslant k \leqslant r)\},$$

约定 $C^0(J) = C(J)$. 定义[2]

$$\| u \|_r = \max_{0 \leqslant k \leqslant r} \| u^{(k)} \|_0, u \in C^{(r)}(J), \tag{7}$$

其中 $\| \cdot \|_0$ 记 sup 范数(1.1.3). 对于 $u, u_n \in C^r(J)(n = 1,2,\cdots)$，有

$$\| u_n - u \|_r \to 0 \Leftrightarrow \| u_n^{(k)} - u^{(k)} \|_0 \to 0 \quad (n \to \infty, k = 0,1,\cdots,r)$$

$$\Leftrightarrow u_n^{(k)} \rightrightarrows u^{(k)} \quad (n \to \infty, k = 0,1,\cdots,r)$$

(参看 1.1.3). 对应于 1.2.1，我们有

1.2.3 命题 $(C^r(J), \| \cdot \|_r)$ 是 Banach 空间.

证 $C^r(J)$ 显然是向量空间，范数公理$(N_1) \sim (N_3)$的验证也是容易的，只需证完备性. 设 $\{u_n\}$ 是 $C^r(J)$ 中的 Cauchy 列，即

$$\lim_{m,n} \| u_m - u_n \|_r = 0,$$

这相当于

$$\lim_{m,n} \| u_m^{(k)} - u_n^{(k)} \|_0 = 0, \quad k = 0,1,\cdots,r.$$

由此可见，对每一个 $k(k = 0,1,\cdots,r)$，$\{u_n^{(k)}\}$ 是 $C(J)$ 中的 Cauchy 列. 因为 $(C(J), \| \cdot \|_0)$ 完备，所以存在 $v_k \in C(J)$，使得 $\| u_n^{(k)} - v_k \|_0 \to 0$，即 $u_n^{(k)} \rightrightarrows v_k(n \to \infty, k = 0,1,\cdots,r)$. 由熟知的数学分析定理有：

$$u_n^{(k)} \rightrightarrows v_k, u_n^{(k-1)} \rightrightarrows v_{k-1} \Rightarrow v_k = v_{k-1}'$$

$(k = 1,2,\cdots,r)$，这推出 $v_k = u^{(k)}, u = v_0, k = 1,2,\cdots,r$. 因此 $u \in C^r(J)$，且 $\| u_n - u \|_r \to 0(n \to \infty)$. 完备性得证. □

这样，我们得到了两族空间 $C^r(J)$ 与 $L^p(J)$，它们构成一个愈来愈大的空间的链：

$$\cdots \subset C^r(J) \subset C^{r-1}(J) \subset \cdots \subset C(J)$$

$$\subset L^\infty(J) \subset L^p(J) \subset L^{p'}(J) \subset L^1(J), \tag{8}$$

其中 $1 < p' < p < \infty$.

如果以更一般的集取代区间 J，则可大大扩充空间族 L^p 与 C^r，且无需实质上

---

[1] 读者当记得，有界函数 Riemann 可积的充要条件是几乎处处连续(见[13, Th3.4.1]).

[2] 当 $r \geqslant 1$ 时，记号 $\| \cdot \|_r$ 可能与 L^r 范数相混. 不过，本书中 $\| \cdot \|_r$ 出现甚少，且每次有明确交待.

新的论证,就可达到与 1.2.1 及 1.2.3 同样的结论,只是形式上更繁些罢了.下面只陈述结论,有兴趣的读者可仿照 1.2.1 与 1.2.3 补足必要的证明.

1° 设(Ω,μ)是一测度空间.对Ω上任一可测函数u,令

$$\|u\|_p=\begin{cases}\left(\int_\Omega |u|^p d\mu\right)^{1/p}, & 1\leqslant p<\infty;\\ \inf\limits_{\Lambda\subset\Omega,\mu\Lambda=0}\sup\limits_{x\in\Omega\setminus\Lambda}|u(x)|, & p=\infty,\end{cases}\tag{1'}$$

$$L^p(\Omega)=\{u: u \text{ 是 }\Omega\text{ 上的可测函数且 }\|u\|_p<\infty\}.\tag{2'}$$

若Ω上几乎处处相等的函数不加区别,则$(L^p(\Omega),\|\cdot\|_p)$是一Banach空间.相应地,$L^p$范数、$L^p$收敛等术语有自明的意义.当需指明所用测度$\mu$时,将$L^p(\Omega)$写作$L^p(\Omega,\mu)$;若不致混淆,可简写作$L^p$.若$\Omega\subset\mathbf{R}^n$而未特别说明,则$L^p(\Omega)$总理解为$L^p(\Omega,m)$,其中$m$为$n$维 Lebesgue 测度.若取$\Omega=\mathbf{N}$,而$\mu$为$\mathbf{N}$上的计数测度(见[13,p.43]),则通常记$L^p(\mathbf{N},\mu)$为$l^p$.对任何$x=(x_i)\in l^p$,依(1′)有

$$\|x\|_p=\begin{cases}\left(\sum\limits_i|x_i|^p\right)^{1/p}, & 1\leqslant p<\infty;\\ \sup\limits_i|x_i|, & p=\infty.\end{cases}\tag{1''}$$

l^p是最简单的无限维 Banach 空间之一,常用作解释某些概念与结论的模型.若$1\leqslant p=\dfrac{q}{q-1}\leqslant\infty$,$x=(x_i)\in l^p$,$y=(y_i)\in l^q$,则成立 Hölder 不等式

$$\left|\sum_i x_iy_i\right|\leqslant\|x\|_p\|y\|_q\tag{9}$$

(对照不等式(4)).在(9)中取$p=q=2$得到 **Cauchy 不等式**:

$$\left|\sum_i x_iy_i\right|^2\leqslant\sum_i|x_i|^2\sum_i|y_i|^2.\tag{10}$$

2° 设Ω是$\mathbf{R}^n$中一有界闭区域,$r\in\mathbf{Z}_+$.以$C^r(\Omega)$记Ω上有r阶连续偏导数的实(或复)函数之全体,令

$$\|u\|_r=\max_{|\alpha|\leqslant r}\|\partial^\alpha u\|_0,\quad u\in C^r(\Omega),\tag{7'}$$

其中

$$\partial^\alpha u=\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbf{Z}_+^n$,$|\alpha|=\sum\alpha_i$.约定$\partial^0u=u$,此处$0=(0,0,\cdots,0)\in\mathbf{Z}^n$.则$(C^r(\Omega),\|\cdot\|_r)$是一Banach空间,在其中$u_k\to u(k\to\infty)$意味着在$\Omega$上

$$\partial^\alpha u_k\rightrightarrows\partial^\alpha u\quad(k\to\infty,|\alpha|\leqslant r).$$

若空间$L^p(\Omega)$或$C^r(\Omega)$中的函数取实(复)值,则$L^p(\Omega)$或$C^r(\Omega)$是实(复)Banach空间.不过,本节的讨论及今后的应用一般与所取的数域无关.

§1.3 点 集

设 X 是给定的赋范空间. 本节的任务是:借助于平常的几何术语,对 X 中点集的构造给出某种形象化的描述. 读者可能会感到,本节罗列的概念很多,而重大结论甚少. 然而,所述内容对于整个泛函分析都是很基本的,今后几乎随时用到.

首先引入球的概念,它是 Banach 空间理论中一个基本的辅助工具. 给定 $a \in X, r > 0$,令

$$B_r(a) = \{x \in X : \|x - a\| < r\}; \tag{1}$$

$$\overline{B}_r(a) = \{x \in X : \|x - a\| \leqslant r\}, \tag{2}$$

二者分别称为 X 中以 a 为心以 r 为半径的**开球与闭球**,而称

$$S_r(a) \triangleq \overline{B}_r(a) \setminus B_r(a)$$

为球面. 有时为书写方便,也将 $B_r(a), \overline{B}_r(a)$ 写作 $B(a, r), \overline{B}(a, r)$.

1.3.1 定义 设 $A \subset X, x \in X$.

(i) 若存在 $r > 0$,使 $B_r(x) \subset A$,则称 x 为 A 内点,称 A 为 x 的**邻域**①. 以 A° 记 A 的内点之全体,称它为 A 的**内部**.

(ii) 若 $\forall r > 0$,有 $A \cap B_r(x) \neq \varnothing$,则称 x 为 A 的触点. 以 $\overline{A}$ 记 A 的触点之全体,称它为 A 的**闭包**.

(iii) 令 $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$,称它为 A 的**边界**,其中的点称为 A 的边界点.

(iv) 若 $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$,则称 x 为 A 的**聚点**或极限点. 以 A' 记 A 的聚点之全体,称它为 A 的**导集**.

如果设想 A 是通常的平面(或空间)图形,则关于内部、闭包、边界等概念的直观印象是极为明显的,正是这种直观印象为理解上述诸概念提供了主要的启示,值得充分利用. 但也应注意,不要以直观印象来代替逻辑论证.

同一概念可从多种不同角度来刻画. 以闭包概念为例说明如下.

1.3.2 命题 设 $A \subset X, x \in X$,则以下条件互相等价:

(i) $x \in \overline{A}$;

(ii) 存在序列 $\{x_n\} \subset A$,使 $x_n \to x (n \to \infty)$;

(iii) $d(x, A) = 0$;

(iv) $x \in A \cup A'$.

证 (i)⇒(ii). 若 $x \in \overline{A}$,则依定义,$\forall n \in \mathbf{N}, \exists x_n \in A \cap B_{1/n}(x)$,于是 $\{x_n\} \subset A, x_n \to x (n \to \infty)$.

---

① 较常用的是开邻域,特别是球形邻域. 但限于使用开邻域并无必要.

(ii)⇒(iii). 若 $\{x_n\}\subset A$, $x_n\to x(n\to\infty)$,则

$$d(x,A)\leqslant\|x-x_n\|\to 0\quad(n\to\infty)$$

(参考 §1.1(5)),这推出 $d(x,A)=0$.

(iii)⇒(iv). 若 $d(x,A)=0$,则必有 $x_n\in A(n=1,2,\cdots)$,使 $\|x-x_n\|\to 0(n\to\infty)$. 若 $x\overline{\in}A$,则必 $x\neq x_n(n=1,2,\cdots)$. 于是对任给 $r>0$,当 n 充分大时 $x_n\in(A\setminus\{x\})\cap B_r(x)$,这表明 $x\in\overline{A\setminus\{x\}}$,即 $x\in A'$.

(iv)⇒(i). 设 $x\in A\cup A'$. 若 $x\in A$,则显然 $x\in\bar{A}$. 若 $x\in A'$,则 $x\in\overline{A\setminus\{x\}}\subset\bar{A}$. □

从 1.3.2 及 1.3.1(iii) 得出

$$\bar{A}=A\cup A'=A^{\circ}\cup\partial A.$$

1.3.1 定义的诸概念中,内部与闭包最为重要,它们彼此呈现出某种对偶性,以下命题特别显示了这种对偶性.

1.3.3 命题 设 $A,B\subset X$,则以下结论成立:

(i) $A^{\circ}=(\overline{A^c})^c$, $\bar{A}=A^{c\circ c}$.

(ii) $A\subset\bar{A}$; $A\subset B\Rightarrow\bar{A}\subset\bar{B}$; $\bar{A}=\bar{\bar{A}}$; $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

(iii) $A^{\circ}\subset A$; $A\subset B\Rightarrow A^{\circ}\subset B^{\circ}$; $A^{\circ}=A^{\circ\circ}$; $(A\cap B)^{\circ}=A^{\circ}\cap B^{\circ}$.

证 (i) $x\in A^{\circ}\Leftrightarrow\exists r>0:B_r(x)\subset A\Leftrightarrow\exists r>0:A^c\cap B_r(x)=\varnothing\Leftrightarrow x\overline{\in}\overline{A^c}$,这表明 $A^{\circ}=(\overline{A^c})^c$. 进而有:

$$\bar{A}=(\overline{A^{cc}})^{cc}=((\overline{(A^c)^c})^c)^c=A^{c\circ c}.$$

(ii) 显然 $A\subset A$, $A\subset B\Rightarrow\bar{A}\subset\bar{B}$, $\bar{A}\subset\bar{\bar{A}}$. 若 $x\in\bar{\bar{A}}$,则由命题 1.3.2 有 $\{x_n\}\subset\bar{A}$,使 $x_n\to x(n\to\infty)$. 取 $y_n\in A\cap B_{1/n}(x_n)(n=1,2,\cdots)$,则 $y_n\to x(n\to\infty)$,故 $x\in\bar{A}$. 这就证得 $\bar{A}=\bar{\bar{A}}$. 由 $A\subset A\cup B$ 得 $\bar{A}\subset\overline{A\cup B}$; 同理 $\bar{B}\subset\overline{A\cup B}$,因此 $\bar{A}\cup\bar{B}\subset\overline{A\cup B}$. 若 $x\in\overline{A\cup B}$,则有 $\{x_n\}\subset A\cup B$,使 $x_n\to x$. 不妨设有 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}\subset A$,因此由 $x_{n_k}\to x$ 得 $x\in\bar{A}$,从而 $x\in\bar{A}\cup\bar{B}$,这就证得 $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

(iii) 由(i),(ii)及集运算的对偶律[①]得出. 例如,

$$\begin{aligned}(A\cap B)^{\circ}&=[\overline{(A\cap B)^c}]^c=(\overline{A^c\cup B^c})^c\\&=(\overline{A^c}\cup\overline{B^c})^c=(\overline{A^c})^c\cap(\overline{B^c})^c\\&=A^{\circ}\cap B^{\circ}.\end{aligned}$$ □

现在引进点集论中最重要的概念.

1.3.4 定义 设 $A\subset X$.

(i) 若 $A=A^{\circ}$,则称 A 为**开集**.

---

① 如读者所熟知的,$(\bigcup A_i)^c=\bigcap A_i^c$, $(\bigcap A_i)^c=\bigcup A_i^c$.

(ii) 若 $\bar{A} = A$，则称 A 为**闭集**.

结合 1.3.1 ~ 1.3.4 易得出以下结论：

1° A 是开集 $\Leftrightarrow A \subset A^\circ \Leftrightarrow A$ 中每点为内点. 直观上，A 是开集意味着 A 含点 x 时亦必含 x 邻近的点. 因此，“微小的扰动”不会使 A 中的点逸出 A 外. 鉴于此，开集常用来表达某种性质的“稳定性”. 例如，在 n 阶实矩阵的空间 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 中，可逆矩阵之全体构成一开集(试证之!)，这意味着，矩阵的“可逆性”是一稳定性质，它不因微小扰动而被破坏. 这样的结论在实际问题中无疑是很有意义的.

2° A 是闭集 $\Leftrightarrow \bar{A} \subset A \Leftrightarrow \partial A \subset A \Leftrightarrow A' \subset A \Leftrightarrow A$ 中任何收敛序列的极限属于 A. 因此，闭集可刻画为“对极限运算封闭”的集. 例如，在空间 $C(J)$ 中，非负函数组成一闭集，因当 $u_n \geqslant 0 (n = 1,2,\cdots)$，$u_n \to u$ 时必定 $u \geqslant 0$. 但“正函数”不组成闭集.

关于开集、闭集运算性质的以下结果有基本的重要性.

1.3.5 定理 (i) 设 $A \subset X$，则 A 是开集 $\Leftrightarrow A^c$ 是闭集.

(ii) X 中任意个开集的并及有限个开集的交是开集.

(iii) X 中任意个闭集的交及有限个闭集的并是闭集.

证 (i) 依 1.3.3(i) 有 $A = A^\circ \Leftrightarrow A^c = A^{\circ c} = \overline{A^{cc}} = \overline{A^c}$，即 A 是开集 $\Leftrightarrow A^c$ 是闭集.

(ii) 若 $A_i \subset X (i \in I)$ 是开集，则由

$$\bigcup_i A_i = \bigcup_i A_i^\circ \subset \left(\bigcup_i A_i\right)^\circ$$

知 $\bigcup A_i$ 为开集. 若 $A, B \subset X$ 是开集，则由 1.3.3(iii) 有

$$A \cap B = A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ,$$

可见 $A \cap B$ 是开集. 进而用归纳法得出有限个开集的交恒为开集.

(iii) 由(i)，(ii) 及对偶律得出. □

直接看出 $X, \varnothing$ 是 X 中的开集(由 1.3.5(i)，它们同时也是闭集!). 这一结论与 1.3.5(ii) 一起表达了开集族的特征性质，文献中称为“开集公理”. 赋范空间中点集论的所有基于极限(但不涉及其他关系，如代数运算、距离等)的结果，皆是开集公理的逻辑推论. 这一事实启示人们去建立仅仅依赖于开集公理，而无需任何范数概念的点集论，这正是点集拓扑学的任务，我们将在 §1.8 中作初步介绍.

至此，我们依然不很清楚，如何利用已建立的点集概念与结论来揭示空间的结构，而这在本书中是至关重要的. 在赋范空间的研究中，基本的困难是空间**过大**了，它包含**太多**的元素，因而难以把握. 例如，空间 $L^p[a,b]$ 除了包含 $[a,b]$ 上的所有连续函数之外，还包含“更多”的性质很差的函数，这使得似乎很难在如此庞杂的对象中解决问题. 能否仅仅依赖于空间中少数挑选的元素作为“基干”，而其余的元素可从这些基本的元素表示出来?这就是**基**的概念. 实际上，在线性代数中已得益于基的概念了. 一个(有限维)向量空间 X 的基，是一组线性无关的元

$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，使得每个 $x \in X$ 可表为 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的线性组合，用记号表示就是

$$X = \operatorname{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}. \tag{3}$$

在某种意义上，对于 X 的研究，仅使用 n 个元 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 就够了. 如此带来的简化何其明显！现在，我们要将同一思想用于一般赋范空间. 不过，不像表达式(3)那样仅用代数运算，而且也要用极限运算. 简单地说，我们的任务是：在赋范空间 X 中挑选一个较小的子集 A，使得每个 $x \in X$ 都可用 A 中的元通过极限运算与代数运算表示出来，因而某些问题只需在 A 上处理就够了. 这一考虑导致一系列概念，它们在 Banach 空间理论中具有基本的重要性.

1.3.6 定义 设 $A,B \subset X$.

(i) 若 $\bar{A} = X$，则称 A 为 X 中的**稠集**，或说 A 是稠密的；若 $B \subset \bar{A}$，则说 A 在 B 中稠密，当 $A \subset B \subset \bar{A}$ 时称 A 为 B 的稠子集.

(ii) 若 $\overline{\operatorname{span}A} = X$，即 $\operatorname{span}A$ 为稠集，则称 A 为 X 的**基本集**.

(iii) 若 $A = \{e_n : n \in \mathbf{N}\}$，每一个 $x \in X$ 可唯一地表为 $\{e_n\}$ 的**无限线性组合**：

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n, \tag{4}$$

则称 A 为 X 的基或 **Schauder 基**.

(iv) 若 X 中有可数的稠集，则称 X 为**可分空间**. 一般地，若 B 含有可数的稠子集，则称 B 为**可分集**.

直接从定义看出，若 A 是 X 的稠集，则每个 $x \in X$ 可表为 A 中某个序列的极限，或说 x 可用 A 中的元逼近；若 A 是 X 的基本集，则每个 $x \in X$ 可用 A 中元的线性组合逼近. 显然，稠集与 Schauder 基都是基本集. 另一个常用的简单结果是：

1.3.7 命题 X 可分 $\Leftrightarrow X$ 有可数的基本集.

证 只需指明，若 A 是 X 的可数基本集，B 是 A 中元的有理系数线性组合之全体，则 B 是可数集(参考[13,Th.1.3.8])，且 $\bar{B} = X$，从而 X 是可分的. □

现在考虑一些具体空间中基本集的例子.

1.3.8 例 1° 令 $e_i = (0,\cdots,0,1,0,\cdots)$，1 在第 i 项. 今指明 $\{e_i : i \in \mathbf{N}\}$ 是空间 $l^p(1 \leqslant p < \infty)$ 的 Schauder 基，因而亦是 l^p 的基本集，于是 l^p 是可分的. 事实上，任给 $x = (x_i) \in l^p$，由 $\sum |x_i|^p < \infty$ 推出：

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\|_p^p = \sum_{i>n} |x_i|^p \to 0 \quad (n \to \infty),$$

这正表明 $x = \sum_1^{\infty} x_i e_i$.

为行文简便，今后称 $\{e_i\}$ 为 l^p 的**标准基**. 当涉及 l^p 与 $\{e_i\}$ 而未加说明时，总假定 $\{e_i\}$ 是标准基.

2° 设 $J = [a,b](a < b)$. 令

$$A = \{\chi_{[a,x]} : x \in J\}, \tag{5}$$

则易见 span$A$ 由 J 上的阶梯函数组成. 因可指明每个 $u \in L^p(J)(1 \leqslant p < \infty)$ 可用阶梯函数 p 次平均逼近(参考[13,Th.4.2.3]),故 A 是 $L^p(J)$ 的基本集. 注意到式(5) 中可限定 x 取有理数而使 A 为可数集,可见空间 $L^p(J)$ 是可分的.

用稍复杂的方法可以说明:对任何 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $L^p(\Omega)(1 \leqslant p < \infty)$ 都是可分的.

3° 令 $A = \{x^n : n \in \mathbf{Z}_+\}$, 则 span$A$ 就是多项式之全体. 于是由著名的 Weierstrass 定理得出: $\overline{\text{span}A} = C(J)$, 从而 A 是 $C(J)$ 的基本集, 且 $C(J)$ 是可分的. 注意 A 也是 $L^p(J)(1 \leqslant p < \infty)$ 的基本集.

一般说来,为充分利用基本集的好处,通常应将它取得尽可能地"小",而且其中的元素足够简单,或已被充分研究而容易把握,因而容易在其上建立某些命题;而通过一个极限过程,就可将这些命题推广到全空间上. 这种方法在整个泛函分析中具有基本意义. 下面看一简单例子.

1.3.9 例 设 $J = [a,b](a < b)$, 以 A 记 J 上的阶梯函数之全体. 对任给 $n \in \mathbf{N}$, 定义 $L^1(J)$ 上的泛函

$$f_n(u) = \int_a^b u(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \quad u \in L^1(J).$$

不难验证 $\lim_n f_n(\chi_{[a,x]}) = 0(\forall x \in J)$. 进而推出, $\forall u \in A$, 有 $\lim_n f_n(u) = 0$. 现利用 A 为稠集推出上述结论适用于任何 $u \in L^1(J)$. 事实上, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $v \in A$, 使 $\| u - v \|_1 < \varepsilon$; 取 $N > 0$, 使得

$$|f_n(v)| < \varepsilon \quad (\forall n \geqslant N).$$

则当 $n \geqslant N$ 时有

$$\begin{aligned} |f_n(u)| &\leqslant |f_n(v)| + |f_n(u) - f_n(v)| \\ &< \varepsilon + \int_a^b |u(x) - v(x)|\,|\sin nx|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon(b - a), \end{aligned}$$

可见 $\lim_n f_n(u) = 0$. 已证的事实就是熟知的 Lebesgue 引理.

在 1.3.9 中所用的方法,在 §2.7 中将予以系统化(参考定理2.7.2),并加以充分发挥.

§1.4 映射与连续性

映射的概念已经或详或略地出现于数学分析与实变函数等课程中,读者应当不会感到陌生. 但为便于查用,我们还是将有关映射的基本用语概述于下.

设 X,Y 是任意给定的非空集.若对每个 $x\in X$,指定了某个 $y\in Y$ 与之对应(通常写 y 为 Fx 或 $F(x)$),则说给定了一个映射①$F:X\to Y$,且称 X 为 F 的定义域,称 $R(F)\triangleq\{Fx:x\in X\}$ 为 F 的值域.无论 Fx 是数与否,都称 Fx 为 F 在 x 的"值".

设 $F:X\to Y$ 是一映射.若 $Fx=Fy\Rightarrow x=y$,则称 F 为**单射**;若 $R(F)=Y$,则称 F 为**满射**;同时为单射与满射的映射称为**双射**.若 F 为双射,则 F 有逆映射 F^{-1},即

$$F^{-1}:Y\to X,Fx\to x.$$

若 $\varnothing\neq A\subset X$,则称映射 $A\to Y,x\to Fx$ 为映射 $F:X\to Y$ 在 A 上的限制,记作 $F|A$ 而称 F 为 $F|A$ 的扩张或延拓.若 $G:Y\to Z$ 是另一个映射,则称映射

$$H:X\to Z,x\to G(Fx)$$

为映射 G 与 F 的复合映射,记作 $H=G\circ F$.对于映射 $F:X\to Y$ 与 $A\subset X$,$B\subset Y$,约定

$$FA=\{Fx:x\in A\},F^{-1}B=\{x\in X:Fx\in B\}.$$

FA 称为 A 在映射 F 下的**象**,$F^{-1}B$ 称为 B 关于 F 的**原象**.关于象与原象的以下简单命题是常用的.

1.4.1 命题 给定映射 $F:X\to Y,G:Y\to Z,A,A_i\subset X,B,B_i\subset Y$ $(i\in I),C\subset Z$,有以下结论成立:

(i) $A\subset F^{-1}(FA),F(F^{-1}B)\subset B$.

(ii) $A\subset F^{-1}B\Leftrightarrow FA\subset B$.

(iii) $F(\bigcup A_i)=\bigcup FA_i,F(\bigcap A_i)\subset\bigcap FA_i$.

(iv) $F^{-1}(\bigcup B_i)=\bigcup F^{-1}B_i,F^{-1}(\bigcap B_i)=\bigcap F^{-1}B_i$.

(v) $(G\circ F)^{-1}C=F^{-1}(G^{-1}C)$.

以下设 X,Y 是两个赋范空间.约定记号

$$F:D\subset X\to Y$$

表示映射 $F:D\to Y$,其中 D 是 X 的非空子集.几乎照搬数学分析中的连续性定义得到:

1.4.2 定义 给定映射 $F:D\subset X\to Y$ 与点 $x_0\in D$.若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $x\in D,\|x-x_0\|<\delta$ 时恒有 $\|Fx-Fx_0\|<\varepsilon$,则说 F 在点 x_0 处连续.若 F 在 D 上每点处连续,则说 F 在 D 上连续.

约定以 $C(D,Y)$ 记从 D 到 Y 的连续映射之全体,而令 $C(D)=C(D,\mathbf{K})$,

① 在现代数学中,映射、函数、算子、变换等用语并无实质上的差别,只是因习惯的关系,在不同的场合,用法上有所偏重.例如,泛函分析中通用算子一词;而到 **R** 或 **C** 中的映射通常叫函数或泛函.名称的选择并不是本质的.

$\mathbf{K} = \mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$.

从定义直接看出,F 在 x_0 处连续有以下两个等价刻画:

1° $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: F(D \cap B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(Fx_0)$[①].

2° 若在 D 中 $x_n \to x_0$,则 $Fx_n \to Fx_0 (n \to \infty)$,即

$$\lim_n Fx_n = F(\lim_n x_n). \tag{1}$$

读者应记得,数学分析中正是用类似于(1)的等式表达连续性.

在泛函分析中由以下定理所表达的连续性条件或许更加有用.

1.4.3 定理 设 $D \subset X$ 是开(或闭)集,则映射 $F: D \to Y$ 连续的充要条件是,对任给开(或闭)集 $V \subset Y$,$F^{-1}V$ 是 X 中的开(或闭)集.

证 不妨只考虑"开"的情况. 首先设 F 连续,$V \subset Y$ 是一开集. 任给 $x \in F^{-1}V$,有 $Fx \in V$. 因 Fx 是 V 的内点,故有 $\varepsilon > 0$,使 $B_\varepsilon(Fx) \subset V$ (1.3.1(i)). 由 F 在点 x 连续有 $\delta > 0$,使

$$F(D \cap B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(Fx) \subset V. \tag{2}$$

因 $x \in D$,而 D 是开集,故不妨设 $B_\delta(x) \subset D$(否则适当缩小 δ). 因此由(2)有 $F(B_\delta(x)) \subset V$,这推出 $B_\delta(x) \subset F^{-1}V$(1.4.1(ii)),可见 $x \in (F^{-1}V)^\circ$. 这证得 $F^{-1}V$ 为开集.

反之,设开集关于 F 的原象恒为开集,今证 F 在任一点 $x_0 \in D$ 处连续. 任给 $\varepsilon > 0$,因 $B_\varepsilon(Fx_0)$ 是 Y 中的开集,故 $F^{-1}B_\varepsilon(Fx_0)$ 是 X 中的开集,这推出 x_0 是 $F^{-1}B_\varepsilon(Fx_0)$ 的内点. 于是有 $\delta > 0$,使 $B_\delta(x_0) \subset F^{-1}B_\delta(Fx_0)$,即 $FB_\delta(x_0) \subset B_\varepsilon(Fx_0)$(1.4.1(ii)),可见 F 在 x_0 处连续. □

特别,将定理 1.4.3 用于实泛函得到:

1.4.4 推论 设 $f: D \subset X \to \mathbf{R}$. 若 D 是开集,则 $f \in C(D) \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbf{R}$, $D(f > \alpha)$ 与 $D(f < \alpha)$ 恒为开集;若 D 是闭集,则 $f \in C(D) \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbf{R}$, $D(f \geqslant \alpha)$ 与 $D(f \leqslant \alpha)$ 恒为闭集.

上面用到记号

$$D(f > \alpha) = \{x \in D : f(x) > \alpha\};$$

$D(f < \alpha), D(f \geqslant \alpha), D(f \leqslant \alpha)$ 仿此.

证 不妨只考虑 D 是开集的情况. 若 $f \in C(D)$,则直接由定理 1.4.3 推出 $D(f > \alpha) = f^{-1}(\alpha, \infty)$ 与 $D(f < \alpha) = f^{-1}(-\infty, \alpha)$ 是开集. 反之,设 $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, $D(f > \alpha)$ 与 $D(f < \alpha)$ 恒为开集. 任给开集 $V \subset \mathbf{R}$,不妨设 $V \neq \varnothing$,则 V 是其构成区间之并([13, Th. 1.5.1]): $V = \bigcup (\alpha_i, \beta_i)$, 于是

---

① 注意球 $B_\delta(x_0)$ 在 X 中,而球 $B_\varepsilon(Fx_0)$ 在 Y 中. 此处及以后都在不同的空间中使用同样的球记号 $B_r(a)$,通常总可以从行文看出涉及的球属于哪个空间而无混淆之虞.

$$f^{-1}V = \bigcup_i f^{-1}(\alpha_i, \beta_i) \quad (\text{用 } 1.4.1(\text{iv}))$$
$$= \bigcup_i [D(f > \alpha_i) \cap D(f < \beta_i)]$$

是开集(用 1.3.5). 于是由 1.4.3,有 $f \in C(D)$. □

与传统的数学分析方法相比较,由 1.4.3 及 1.4.4 所提供的刻画连续性的方法——可称之为点集论方法——在风格上是极不相同的. 就某些目的而言,点集论方法更加有效. 首先,1.4.3 或 1.4.4 提供了构造开集或闭集的一种普遍方法. 例如,由 1.4.4 推出在矩阵空间 $X = \mathbf{R}^{n\times n}$ 中,可逆矩阵组成一开集 G. 事实上,令

$$f: X \to \mathbf{R}, A \to \det A,$$

则 $G = X(f > 0) \cup X(f < 0)$,于是由 f 连续及 1.4.4 推出 G 为开集. 另一个例子是,在空间 $C[a,b]$ 中

$$\left\{ u \in C[a,b] : \int_a^b |u(x)|^2 \mathrm{d}x \leqslant n \right\}$$

恒为闭集. 要证实这一点,依 1.4.4,只需指明

$$f: C[a,b] \to \mathbf{R}, u \to \int_a^b |u(x)|^2 \mathrm{d}x$$

连续就够了,而后者正是数学分析中积分与极限交换定理的推论.

初看起来,利用 1.4.3 判定连续性似乎是不方便的. 但在某些情况下,应用 1.4.3 有其便利,下举一例.

1.4.5 例 设 $D = \bigcup_1^n D_i \subset X$,每个 D_i 为非空闭集,$F: D \to Y$. 若 F 限制在每个 D_i 上连续,则 F 连续.

证 首先注意 D 是闭集(1.3.5(iii)). 任给闭集 $B \subset Y$,有

$$F^{-1}B = \bigcup_i F_i^{-1}B,$$

其中 $F_i = F|D_i$. 由已知条件及 1.4.3,每个 $F_i^{-1}B$ 是闭集,从而 $F^{-1}B$ 是闭集. 因此 F 连续.

§1.5 紧 性

数学分析中有几个基本定理——有限覆盖定理、区间套定理、聚点原理等,构成整个经典分析的理论基石. 实际上,这些定理在逻辑上是互相等价的(如参考[13, §1.6]). 一个极具诱惑力的问题是,能将有限覆盖定理等推广于赋范空间吗?我们回忆到,为推广 Cauchy 收敛原理,界定了一类特殊的赋范空间,即 Banach 空间. 其次也注意到,有限覆盖定理仅适用于特殊的集:闭区间;或更一般地,$\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集. 那么,在赋范空间中类似于闭区间,因而可对之推广有限覆盖定理的点集是什么呢?这样的集原来就是紧集,它是本节的研究对象.

以下设 X 是给定的赋范空间.

1.5.1 定义　设 $A \subset X$. 若 $\mathscr{U}$ 是 X 的一族子集且其中诸集之并包含 A,则说 $\mathscr{U}$ 覆盖 A,或称 $\mathscr{U}$ 为 A 的覆盖;若 $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$ 且 $\mathscr{V}$ 覆盖 A,则称 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的子覆盖. 由开集组成的覆盖称为开覆盖. 若 A 的任何开覆盖有有限子覆盖(即由有限个集组成的子覆盖),则称 A 为**紧集**. 若 $\bar{A}$ 为紧集,则称 A 为**相对紧集**.

于是可以说,紧集正是使**有限覆盖定理成立**的点集;**R** 中的闭区间与有界闭集是紧集.

一个与 1.1.4 有点类似的命题是:

1.5.2 命题　紧集是闭集;紧集的闭子集是紧集;相对紧集的任何子集是相对紧集.

证　设 $A \subset X$ 是紧集,今证 A^c 是开集(从而 A 是闭集). 取定 $x \in A^c$,任给 $a \in A$,取 $r_a > 0$ 充分小,使 $B(a, r_a) \cap B(x, r_a) = \varnothing$. 显然 $\{B(a, r_a): a \in A\}$ 是 A 的开覆盖,而 A 是紧集,故有有限集 $\{a_i\} \subset A$,使

$$A \subset \bigcup_i B(a_i, r_{a_i}) \triangleq U.$$

因

$$x \in \bigcap_i B(x, r_{a_i}) \subset \bigcap_i [B(a_i, r_{a_i})]^c = U^c \subset A^c,$$

故 x 是 A^c 的内点. A^c 为开集得证.

其次设 B 是紧集 A 的闭子集. 若 $\mathscr{U}$ 是 B 的开覆盖,则 $\mathscr{U} \cup \{B^c\}$ 是 A 的开覆盖. 于是有有限个 $U_i \in \mathscr{U}$,使 $A \subset B^c \cup (\bigcup_i U_i)$,这推出 $B \subset \bigcup U_i$,可见 B 是紧集.

最后一个结论的证明是直接的. □

直接用定义 1.5.1 来判定集的紧性未必容易,因此需要关于紧性的一些等价刻画. 这样的结果甚多,以下定理是最常用的.

1.5.3 定理　若 A 是 Banach 空间 X 的闭子集,则以下条件互相等价:

(i) A 是紧集;

(ii) 若 $B_n (n = 1,2,\cdots)$ 是非空闭集,$A \supset B_1 \supset B_2 \supset \cdots$,则 $\bigcap B_n \neq \varnothing$;

(iii) A 中任何序列含收敛子列;

(iv) $\forall r > 0$,A 可用有限个半径为 r 的球覆盖.

当 A 满足条件(iv)时(无论 A 为闭集与否),称它为**全有界集**.

1.5.3 中的(ii)可称之为"闭集套定理",它显然可看作区间套定理的推广. 至于(iii),易见它等价于命题:A 的任何无限子集必有聚点. 因此,通过定理 1.5.3,在 Banach 空间这一更高的层次上实现了有限覆盖定理、闭集套定理及聚点原理的统一.

我们将 1.5.3 的较长的证明放在 §1.9 中,直接转向它的以下推论.

1.5.4 推论　对 Banach 空间 X 的任何子集 A,以下条件互相等价:

(i) A 是相对紧集;

(ii) A 中任何序列有收敛子列;

(iii) A 是全有界集.

证 由 1.5.3,直接看出(i)⇒(ii),(i)⇒(iii).余下只需指明:当 A 满足条件(ii) 或(iii) 时 $\bar{A}$ 亦必如此.首先,任取序列 $\{x_n\} \subset \bar{A}$;取 $y_n \in A$ 使 $\|x_n - y_n\| < 1/n(n = 1,2,\cdots)$.若 $\{y_n\}$ 有收敛子列 $\{y_{n_k}\}$,则显然 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的收敛子列.其次,设 A 全有界.$\forall r > 0$,取有限个球 $B_r(x_i)(i = 1,2,\cdots,n)$ 覆盖 A,则

$$A \subset \overline{\bigcup_i B_r(x_i)} = \bigcup_i \overline{B_r(x_i)} \subset \bigcup_i B_{2r}(x_i),$$

可见 $\bar{A}$ 亦为全有界集. □

注.若 1.5.4 中 X 不完备,则仍可证明(i)⇔(ii)⇒(iii)(但(iii)⇒(i) 未必成立).今后我们将利用这一事实.

在数学分析中,利用有限覆盖定理等基本定理证明了关于闭区间上连续函数的一系列结果,下面的定理正是这些结果在赋范空间中的推广.

1.5.5 定理 设 X,Y 是赋范空间,$D \subset X$ 是紧集,$F \in C(D,Y)$,$f \in C(D,\mathbf{R})$.则有以下结论:

(i) F 在 D 上一致连续,即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $x,y \in D, \|x - y\| < \delta$ 时,恒有 $\|Fx - Fy\| < \varepsilon$.

(ii) f 在 D 上取得最大值与最小值.

证 (i) 用反证法:若 F 在 D 上非一致连续,则有 $\varepsilon > 0, x_n, y_n \in D(n = 1,2,\cdots)$,使 $\|x_n - y_n\| \to 0$,而 $\|Fx_n - Fy_n\| \geq \varepsilon(n = 1,2,\cdots)$(正确地写出"非一致连续"的这一刻画是关键的!).因 D 是紧集,故 $\{x_n\}$ 有收敛子列,设 $x_{n_k} \to x \in D$ $(k \to \infty)$;同样有 $y_{n_k} \to x$,但这推出

$$\varepsilon \leq \lim_k \|Fx_{n_k} - Fy_{n_k}\| = \|Fx - Fx\| = 0!$$

得出矛盾.因此 F 必定一致连续.

(ii) 不妨只证最大值存在.取 $\{x_n\} \subset D$,使 $f(x_n) \to \beta \triangleq \sup_{x \in D} f(x)$.取 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_k}\}$,设 $x_{n_k} \to x \in D$,则

$$\beta = \lim_k f(x_{n_k}) = f(x),$$

显然 β 即为 f 在 D 上的最大值. □

如 1.5.5 的证明所显示的,基于紧性的论证令人难以置信地简洁,这正是紧集概念优点之所在.实际上,我们甚至可将 1.5.5 的证明表述得更简单些.例如在(ii) 的证明中,只需改变记号,就可用 $\{x_n\}$ 取代 $\{x_{n_k}\}$.因此可将证明改述如下:取 $\{x_n\} \subset D$,使 $f(x_n) \to \beta(n \to \infty)$.不妨设 $x_n \to x \in D$,则 $f(x_n) \to f(x) = \beta$,β 即 f 之最大值.今后类似证法中用到"不妨"二字时,读者应能完全理解其含义.

鉴于紧集在理论证明中具有难以比拟的优势,寻求特定空间中紧集的具体判别法就成为一重要课题.这一课题仅对于某些特殊的空间得到了彻底解答.首先,对于有限维空间有最简单的结果.

1.5.6 定理 设 X 是有限维 Banach 空间,$A\subset X$.则 A 是紧集 $\Leftrightarrow A$ 是有界闭集;A 是相对紧集 $\Leftrightarrow A$ 是有界集.

证 由定理 1.1.6,不妨设 $X=\mathbf{R}^n$($X=\mathbf{C}^n$ 的情况是类似的).由 1.5.2 ~ 1.5.4,只需指明在 $\mathbf{R}^n$ 中有界 $\Leftrightarrow$ 全有界.这在直观上是毫无疑问的,严格证明留作练习(题 25). □

有点出人意外的是,1.5.6 的结论是有限维空间所独有的.为证明此结论,需要一个引理,它在别处也是重要的.

1.5.7 Riesz 引理(F. Riesz,1918) 设 A 是赋范空间 X 的闭子空间,$A\neq X$,则存在 $x\in X$,使 $\|x\|=1,d(x,A)\geqslant 1/2$.

证 取 $y\in X\setminus A$,则 $\rho\triangleq d(y,A)>0$(参考 1.3.2).取 $a\in A$,使 $\|y-a\|<2\rho$(这种 a 何以存在?).令 $x=(y-a)/\|y-a\|$,则 $\|x\|=1$,

$$\begin{aligned}d(x,A)&=d\left(\frac{y-a}{\|y-a\|},A\right)=\frac{1}{\|y-a\|}d(y-a,A)\\&=\frac{1}{\|y-a\|}d(y,A)\\&>\frac{\rho}{2\rho}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

1.5.8 定理 若 $\dim X=\infty$[①],则 X 中的闭单位球不是紧集.

证 因 $\dim X=\infty$,必有线性无关的无限序列 $\{x_n\}$[②].令 $X_n=\operatorname{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,则 X_n 是 X 的闭子空间,且 $X_n\subsetneqq X_{n+1},n=1,2,\cdots$.由 1.5.7,存在 $x_n\in X_n$,使 $\|x_n\|=1,d(x_n,X_{n-1})\geqslant 1/2,n=2,3,\cdots$.因显然有

$$\|x_m-x_n\|\geqslant 1/2,\quad m\neq n,m,n=2,3,\cdots,$$

故 $\{x_n\}$ 没有收敛子列.因此闭球 $\overline{B}_1(0)$ 不是紧集. □

注意 1.5.8 之证同时也表明无限维空间中单位球面是非紧的.因任何(半径 >0)闭球可通过平移与相似变换互相变换,而这些变换并不改变紧性(何故?),故无限维空间中任何闭球是非紧的.这又推出,无限维空间中任何含内点的集是非紧的,因而任何紧集必无内点.这就多少揭示了无限维空间中紧集的独特性质.

如果囿于平常的直观,无限维空间中球面非紧似乎难以理解.细想起来,这实

① 记号 $\dim X=\infty$ 仅表示 X 不是有限维空间,它并不意味着已定义了某个无限的维数 $\dim X$.

② 向量空间中一无限集线性无关,意指它的任何非空有限子集线性无关.

际上是很自然的. 在完全严格的意义上, $\mathbf{R}^n$ 中单位球面 $S_1(0)$ 的面积随着维数的增加而增加, 因而一定数量的点在 $S_1(0)$ 上将越来越稀疏. 如果 $\dim X$ 增至无穷, 则 $S_1(0)$ 变得如此广袤, 以至即使无限多个点分布于其上, 它们也可能呈离散状态而无聚点, 如同 1.5.8 证明中的 $\{x_n\}$ 一样.

1.5.8 表明, 在某种意义上, 无限维空间中的紧集甚为稀少, 这通常是处理无限维问题的困难之所在. 例如, 设 $B = \overline{B}_1(0) \subset X, f \in C(B, \mathbf{R})$. 若 $\dim X < \infty$, 则可断定 f 有极大值存在; 若 $\dim X = \infty$, 则已不能作此断言!

§1.2 中讨论的空间 $L^p(J)(1 \leqslant p < \infty)$ 与 $C^r(J)$ 中紧集的完全刻画都已找到, 下面只引述一个最常用结果, 其证明在 §1.9 中.

1.5.9 Arzela-Ascoli 定理 $A \subset C(J)$ 相对紧的充要条件是:

(i) A 一致有界, 即 $\sup\limits_{u \in A, x \in J} |u(x)| < \infty$;

(ii) A **等度连续**, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in J, \forall u \in A$, 当 $|x - y| < \delta$ 时恒有 $|u(x) - u(y)| < \varepsilon$.

§1.6 纲定理

设 X 是一 Banach 空间, A 是 X 中由某一条件 P 界定的对象之全体. 例如 $X = C(J)$, A 是 X 中有界变差函数之全体, 或可微函数之全体, 等等. 一个极有意义的问题是: 满足条件 P 的对象在 X 中具有普遍性吗? 例如, 在连续函数空间中, 可微函数具有普遍性吗? 问题看来远不简单, 我们首先试图对问题找到一种恰当的描述. 关键在于何谓**普遍**, 何谓**稀有**? 形式上, 设 $\varnothing \neq \mathscr{A} \subset 2^X$, 2^X 记 X 的幂集(即 X 的子集之全体). 若 $\mathscr{A}$ 满足以下条件:

(C_1) 若 $A_n \in \mathscr{A}\ (n = 1, 2, \cdots)$, 则 $\bigcup A_n \in \mathscr{A}$;

(C_2) 若 $A \subset B \in \mathscr{A}$, 则 $A \in \mathscr{A}$, 特别 $\varnothing \in \mathscr{A}$;

(C_3) 若 $A \in \mathscr{A}$, 则 $A^c \overline{\in} \mathscr{A}$,

则可以认为, 在某种意义上, 每个 $A \in \mathscr{A}$ 都是"很小"的集, 即使从 X 中除去任意可数多个这样的集, X 中仍然有些点保留下来, 而且剩余部分还是"很大"的集. 这样, 我们不妨说, 当 $A \in \mathscr{A}$ 时 A 描述了**稀有性**, 而 A^c 则描述了**一般性**. 极而言之, 可以说 X 中几乎所有的元都属于 A^c, 而 A 则是微不足道的.

这就为解决稀有性与一般性问题提出了一个简单模式, 它看来是很诱人的. 然而, 如何选择集族 $\mathscr{A}$, 使上述设想便于付诸实行呢? 可行的方案不只一种, Baire 的第一纲集概念或许是一种很有效的选择.

1.6.1 定义 设 X 是一赋范空间, $A \subset X$.

(i) 若 $(\overline{A})^\circ = \varnothing$, 则称 A 为**疏集**.

(ii) 可数个疏集之并称为**第一纲集**; 第一纲集的补集称为**剩余集**; 非第一纲

集称为第二纲集.

直接由定义看出,无内点的闭集是疏集.特别,单点集总是疏集,因而可数集是第一纲集;例如,有理点集就是 **R** 中的第一纲集.其次,显然疏集是第一纲集.由此推想,第一纲集含点"较少",是一种"瘦集";而第二纲集则是"非瘦集".进一步的描述已超出通常直观可及的视野.

若以 $\mathscr{A}$ 记 X 中第一纲集之全体,则易见 $\mathscr{A}$ 满足前段所述的条件$(C_1)(C_2)$.至于(C_3)满足与否则尚不明显,这正是如下基本定理所要回答的.

1.6.2 Baire 定理 设 A 是 Banach 空间 X 中的第一纲集,则以下结论成立:

(i) $A^\circ = \varnothing, \overline{A^c} = X$;

(ii) A^c 是第二纲集.

证 设 $A = \bigcup A_n, A_n (n = 1,2,\cdots)$ 是疏集.

(i) 只须证 $A^\circ = \varnothing$,用反证法.设 $A^\circ \neq \varnothing$.因 A° 是非空开集,而$(\overline{A_1})^\circ = \varnothing$,即$(\overline{A_1})^c$ 是开的稠集(参考 1.3.3,1.3.4),故 $A^\circ \cap (\overline{A_1})^c = A^\circ \setminus \overline{A_1}$ 是非空开集,因而其中必含一个闭球 $\bar{B}_{r_1}(x_1)$,可设 $0 < r_1 < 1$.分别以 $B_{r_1}(x_1)$ 与 A_2 代 A° 与 A_1,又得

$$\bar{B}_{r_2}(x_2) \subset B_{r_1}(x_1) \setminus A_2, \quad 0 < r_2 < 1/2.$$

一般地,可递次得出

$$\bar{B}_{r_n}(x_n) \subset B_{r_{n-1}}(x_{n-1}) \setminus \bar{A}_n, \quad 0 < r_n < 1/n \tag{1}$$

$(n = 2,3,\cdots)$.因当 $m > n$ 时有 $\bar{B}_{r_m}(x_m) \subset B_{r_n}(x_n)$,这推出

$$\| x_m - x_n \| < r_n < 1/n, \quad m > n = 1,2,\cdots,$$

故$\{x_n\}$是 Cauchy 列.设 $x_n \to x (n \to \infty)$,则由(1)有

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{B}_{r_n}(x_n) \subset (A^\circ \setminus \bar{A}_1) \cap \left\{\bigcap_{n=2}^{\infty} [B_{r_{n-1}}(x_{n-1}) \setminus \bar{A}_n]\right\}$$

$$\subset A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing,$$

得出矛盾.故必 $A^\circ = \varnothing$.

(ii) 若 A^c 是第一纲集,则 $X = A \cup A^c$ 亦为第一纲集.但由已证的(i),这将得出 $X^\circ = \varnothing$!因此 A^c 只能为第二纲集. □

在 1.6.2 中,X 的完备性是重要的.例如,设 P_n 是区间J 上次数 $\leqslant n$ 的多项式之全体,则 P_n 是$C(J)$的闭子空间.令 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$,则 X 是一不完备的赋范空间,P_n 是 X 中的疏集,因而 X 自身为第一纲集!

鉴于 1.6.2,Banach 空间中的第一纲集之全体满足本节开头所提出的条件$(C_1) \sim (C_3)$,因而 Banach 空间中的第一纲集与剩余集可分别用来刻画稀有性与一般性,这在泛函分析及其应用中是意义重大的.

应用 1.6.2 的途径有两条.其一是利用基于 Baire 定理的某些标准结果,例如

本书将介绍的开映射定理与一致有界原理(参看 2.3.1 与 2.3.5),这可看作 Baire 定理的间接应用. 其二是直接应用 Baire 定理. 这一途径通常依赖于直接构造某个第一纲集,需要更多的技巧性. 下面举两个这一类的例子,我们将着重解释方法的主要思路,而不特别拘泥于个别推导细节.

以下设 $J = [a,b](a < b)$ 是取定的实区间.

1.6.3 例　J 上几乎所有连续函数具有无限全变差.

证　如 §1.1 中已指出的,$X = C(J)$ 依 sup 范数是一 Banach 空间. 令

$$A = \{u \in X : V_a^b(u) < \infty\},$$

其中 $V_a^b(u)$ 记函数 u 在区间$[a,b]$上的全变差(参考[13, §5.2]). 只需验证 A 是 X 中的第一纲集. 为此,令

$$A_n = \{u \in X : V_a^b(u) \leqslant n\}, n = 1,2,\cdots,$$

则 $A = \bigcup A_n$,只需验证每个 A_n 是 X 中的疏集. 不难看出 A_n 是闭集(参考习题22),因此只需证 $A_n^\circ = \varnothing$,即$\overline{A_n^c} = X$;这相当于证每个 $u \in X$ 可用A_n^c 中的函数一致逼近. 因

$$A_n^c = \{u \in X : V_a^b(u) > n\},$$

故问题归于指明:每个给定的 $u \in X$ 可用全变差**充分大**的连续函数一致逼近. 显然,这可用振动足够快的"锯齿形函数"(见图 1 - 3) 的逼近来实现. □

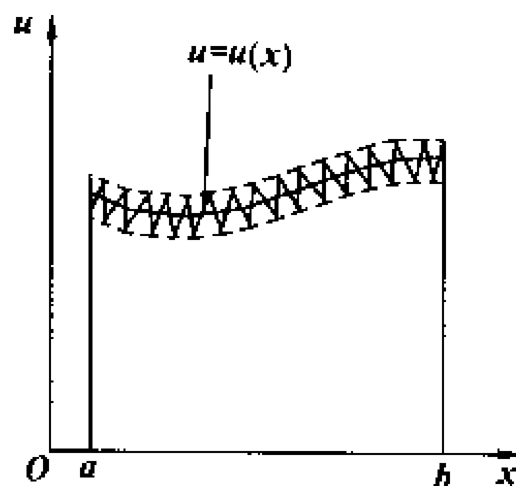


图 1 - 3

读者或许还记得,在实变函数课程中,特别构成的"反例" 表明:连续函数未必是有界变差函数. 而 1.6.3 的结论则要深刻得多:具有无限全变差的连续函数不只是存在,而且实际上并非特例,而几乎是通例. 得出这一结论时并未借助于任何"反例",结论本身与构造反例的难易毫不相关. 于此,读者大概已初步领略到泛函分析方法的惊人效力. 正是这一方法的强大效力,使泛函分析的早期开创者们一度如此迷恋于该方法的应用,以至"纲推理" 一词曾经风行一时.

下面是一个稍复杂但更有说服力的例子.

1.6.4 例 J 上几乎所有连续函数处处不可微.

证 设 $X = C(J)$ 如 1.6.3. 令

$$A = \{u \in X : u \text{ 在}[a,b) \text{ 上至少一点处可微}\};$$
$$B = \{u \in X : u \text{ 在}(a,b] \text{ 上至少一点处可微}\}.$$

任给 $u \in X$, 显然 u 在 J 上处处不可微 $\Leftrightarrow u \overline{\in} A \cup B$. 因此, 只需证 A, B 皆为 X 中的第一纲集. 不妨只证 A 是第一纲集. 令

$$A_n = \left\{u \in X : \exists x \in \left[a, b - \frac{1}{n}\right], \text{使} \sup_{h>0} \frac{|u(x+h) - u(x)|}{h} \leqslant n\right\},$$

则不难看出 $A \subset \bigcup_1^\infty A_n$, 因此只需证 $A_n (n = 1,2,\cdots)$ 是 X 中的疏集. 取定 $n \in \mathbf{N}$. A_n 是闭集. 事实上, 若 $\{u_k\} \subset A_n, u_k \rightrightarrows u (k \to \infty)$, 则有 $x_k \in [a, b - n^{-1}]$, 使

$$|u_k(x_k + h) - u_k(x_k)| \leqslant nh (x_k < x_k + h \leqslant b). \tag{2}$$

不妨设 $x_k \to x \in [a, b - n^{-1}] (k \to \infty)$. 在(2)中令 $k \to \infty$ 得

$$|u(x+h) - u(x)| \leqslant nh (x < x + h \leqslant b),$$

这表明 $u \in A_n$, 即 A_n 是闭集. 于是如同 1.6.3 一样只需证 $A_n^\circ = \varnothing$, 即 $\overline{A_n^c} = X$. 注意

$$A_n^c = \left\{u \in X : \forall x \in \left[a, b - \frac{1}{n}\right] \quad \text{有} \quad \sup_{h>0} \frac{|u(x+h) - u(x)|}{h} > n\right\},$$

类似于 1.6.3 之证, 用如图 1－3 中的锯齿形函数的逼近可得出所要结论. □

1.6.4 的结论初看起来颇令人惊异. 如果考虑到, 构造一个处处不可微的连续函数多少是一件费力气的事(这样的例子最早由 Weierstrass 于 1872 年给出, 当时在数学界引起的震动是可想而知的), 而可微函数则俯拾皆是, 那么, 1.6.4 的结论就更加惊人了. 概言之, 可微性与连续性的差别比初看起来要大得多. 直观上, 这意味着连续曲线很少是光滑的. 无疑, 任何具有足够数学修养的现代数学工作者, 即使在直观上也不会再排斥上述结论, 但却不大可能仅凭初等的考虑达到严格的理解.

§1.7 Hilbert 空间

在前几节中, 我们实际上是将通常 Euclid 空间中处理问题的一些思路移植到 Banach 空间. 通过自然的类比并借用形象的几何语言, Banach 空间理论呈现出某种可加直观想象的面貌. 这样作的效果如此引人入胜, 以至促使人们想再往前推进一步: 将更多的几何概念, 如角度、垂直性等, 都引进到 Banach 空间中来. 然而, 这一设想仅能在一类很特殊的 Banach 空间——Hilbert 空间中获得成功. 关键在于, 角度概念与内积有关, 而只有某些很特殊的范数, 才自然地与内积相联系.

现在,我们就从内积的公理化定义着手.

1.7.1 定义 设 X 是 $\mathbf{K}$ 上的向量空间.若对任一对元 $x,y\in X$,指定了一个数 $\langle x,y\rangle\in\mathbf{K}$,称为 x 与 y 的**内积**,它满足以下**内积公理**:

(I_1) $\langle x,y\rangle$ 对 x 的线性性:$\langle\alpha x+\beta z,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle+\beta\langle z,y\rangle$;

(I_2) 共轭对称性:$\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$;

(I_3) 正定性:$\langle x,x\rangle\geqslant 0$;$\langle x,x\rangle=0\Leftrightarrow x=0$

(以上 $x,y,z\in X,\alpha,\beta\in\mathbf{K}$),则称 X 为**内积空间**,当要明确指出内积时将它写作 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$;当 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$(或 $\mathbf{C}$)时,称 X 为实(或复)内积空间.在实内积空间中,公理(I_2)就是对称性:$\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$.

以下设 X 是一个给定的内积空间.结合(I_1)(I_2)得出 $\langle x,\cdot\rangle$ 的共轭线性性:

$$\langle x,\alpha y+\beta z\rangle=\bar{\alpha}\langle x,y\rangle+\bar{\beta}\langle x,z\rangle,\quad x,y,z\in X,\alpha,\beta\in\mathbf{K}.$$

一般地,设 $\sum\alpha_i x_i$ 与 $\sum\beta_j y_j$ 是 X 中元的两个有限线性组合,则有

$$\langle\sum_i\alpha_i x_i,\sum_j\beta_j y_j\rangle=\sum_{i,j}\alpha_i\bar{\beta}_j\langle x_i,y_j\rangle;$$

$$\langle\sum_i\alpha_i x_i,\sum_i\alpha_i x_i\rangle=\sum_{i,k}\alpha_i\bar{\alpha}_k\langle x_i,x_k\rangle.$$

可见,内积空间中内积运算的规则,大体上相当于通常的乘法规则.

约定 $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ $(x\in X)$,下面说明它是一个范数,称为 X 中由内积定义的范数.直接看出 $\|\cdot\|$ 满足范数公理(N_1)(N_3)(依 1.1.1),但它也满足(N_2)则不明显.为验证这一点,需要如下的

1.7.2 Schwarz 不等式 对任何 $x,y\in X$,成立

$$\boxed{|\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|\,\|y\|}\tag{1}$$

证 取定 $x,y\in X$.对任给 $\alpha\in\mathbf{K}$,由公理(I_3)有

$$\begin{aligned}0&\leqslant\langle x-\alpha y,x-\alpha y\rangle\\&=\|x\|^2-\alpha\langle y,x\rangle-\bar{\alpha}\langle x,y\rangle+\alpha\bar{\alpha}\|y\|^2.\end{aligned}\tag{2}$$

取 $\alpha=\langle x,y\rangle/\|y\|^2$(可设 $y\neq 0$,否则(1)已经成立)代入式(2),整理后即得所要证的不等式. □

现在利用 Schwarz 不等式来验证三角不等式.任给 $x,y\in X$,有

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=\langle x+y,x+y\rangle\\&=\|x\|^2+\langle y,x\rangle+\langle x,y\rangle+\|y\|^2\\&\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\,\|y\|+\|y\|^2\quad(\text{用}(1))\\&=(\|x\|+\|y\|)^2,\end{aligned}$$

故得 $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.这就表明,$(X,\|\cdot\|)$ 是一个赋范空间;当其完备时称为 **Hilbert 空间**.

1.7.3 命题 任给 $x,y\in X$,成立如下**中线公式**:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2). \tag{3}$$

证明是直接的. 注意公式(3)正好表达了熟知的几何定理:平行四边形各边平方和等于两对角线之平方和(见图1-4). 注意 $\|x+y\|$ 正是以 $0,x,y$ 为顶点的三角形的一中线的两倍.

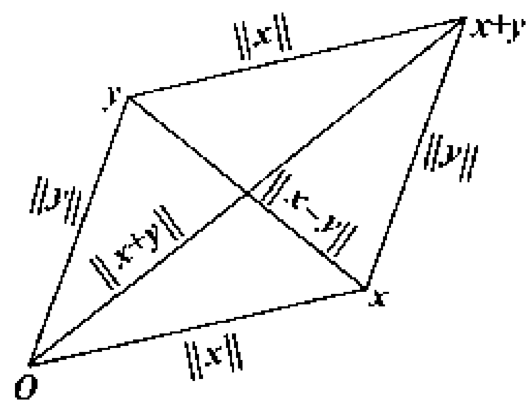


图 1-4

可以证明,中线公式乃是赋范空间成为内积空间的充要条件. 公式(3)无疑是加于范数的一个极强的约束,只有少数范数能满足此条件. 典型的例子是空间 $L^2(\Omega)$[①],(Ω,μ) 是任一测度空间. 在 $L^2(\Omega)$ 中定义内积

$$\langle u,v\rangle=\int_\Omega u\bar{v}\,\mathrm{d}\mu,\ u,v\in L^2(\Omega), \tag{4}$$

则恰有 $\|u\|_2=\sqrt{\langle u,u\rangle}$,即由内积(4)所定义的范数就是 L^2 范数. 相应地,对于 $L^2(\Omega)$,Schwarz 不等式蕴涵于 Hölder 不等式(§1.2(4)). 对于 $L^2(\Omega)$ 的特例 l^2,有

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\bar{y}_i,\ x=(x_i),\ y=(y_i)\in l^2. \tag{5}$$

再回到一般的内积空间 X. 任给 $x,y\in X$,当 $x,y\neq 0$ 时由(1)有

$$\left|\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}\right|\leqslant 1.$$

因此,公式

$$\cos\theta=\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$$

似乎合理地定义出向量 x,y 之间的夹角 θ[②]. 不过,真正重要的是 $\langle x,y\rangle=0$ 这一特殊情况,下面界定与此有关的一连串概念.

1.7.4 定义 (i) 设 $x,y\in X$. 若 $\langle x,y\rangle=0$,则说 x 与 y 正交,记作 $x\perp y$.

(ii) 设 $\{x_i:i\in I\}\subset X$. 若当 $i\neq j$ 时 $x_i\perp x_j$,则称 $\{x_i\}$ 为**正交系**(或正交集、正交组). 若 $\{x_i\}$ 是正交系且 $\|x_i\|=1(\forall i\in I)$,则称 $\{x_i\}$ 为**标准正交系**.

(iii) 设 $A,B\subset X$. 约定 $A\perp B\Leftrightarrow\forall a\in A,\forall b\in B: a\perp b$; $x\perp A\Leftrightarrow\{x\}\perp A$; $A^\perp=\{x\in X: x\perp A\}$,称 $A^\perp$ 为集 A 的**正交补**.

下面是 Hilbert 空间理论中最重要的基本定理之一.

1.7.5 定理 设 $\{e_i:i\in\mathbf{N}\}$ 是 Hilbert 空间 X 中的标准正交系,则以下条件

---

① 在某种完全严格的意义上,适当选择 Ω,$L^2(\Omega)$ 穷尽了所有 Hilbert 空间. 因此可以说,本质上 $L^2(\Omega)$ 是 Hilbert 空间理论的唯一对象.

② 严格地说,这只适合于实内积空间.

互相等价：

(i) 对每个 $x \in X$ 有以下 **Fourier 展开式**

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i e_i, \tag{6}$$

其中 $\hat{x}_i \triangleq \langle x, e_i \rangle (i = 1,2,\cdots)$ 称为 x 关于 $\{e_i\}$ 的 Fourier 系数.

(ii) $\{e_i\}$ 是 X 的基本集(依 1.3.6(ii)).

(iii) $\{e_i\}$ 是极大正交系，即若 $x \perp e_i (i = 1,2,\cdots)$，则必 $x = 0$.

(iv) 任给 $x \in X$，成立以下 **Parseval 等式**：

$$\| x \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} | \hat{x}_i |^2. \tag{7}$$

证 显然(i)→(ii).

(ii)→(iii). 设条件(ii)满足，$x \perp e_i (i = 1,2,\cdots)$. 取 $\{x_n\} \subset X$，使 $x_n \to x$ $(n \to \infty)$，且每个 x_n 是 $\{e_i\}$ 的有限线性组合，则必 $\langle x, x_n \rangle = 0 (n = 1,2,\cdots)$，从而

$$\| x \|^2 = \lim_n \langle x, x_n \rangle = 0,$$

这推出 $x = 0$.

(iii)→(i). 设条件(iii) 满足. 取定 $x \in X$，令 $s_n = \sum_1^n \hat{x}_i e_i$. 由直接计算得出

$$\| x \|^2 - \| s_n - x \|^2 = \| s_n \|^2 = \sum_{i=1}^n | \hat{x}_i |^2, \quad n = 1,2,\cdots. \tag{8}$$

(8)推出

$$\sum_{i=1}^{\infty} | \hat{x}_i |^2 = \lim_n \| s_n \|^2 \leqslant \| x \|^2,$$

可见级数 $\sum | \hat{x}_i |^2$ 收敛. 这又推出当 $m > n$ 时

$$\| s_m - s_n \|^2 = \Big\| \sum_{n < i \leqslant m} \hat{x}_i e_i \Big\|^2 = \sum_{n < i \leqslant m} | \hat{x}_i |^2 \to 0 \quad (m, n \to \infty),$$

因此 $\{s_n\}$ 是 Cauchy 列. 设 $s_n \to y (n \to \infty)$. 任给 $i \in \mathbf{N}$，有

$$\langle y - x, e_i \rangle = \lim_n \langle s_n - x, e_i \rangle = \lim_n \langle \sum_{j=1}^n \hat{x}_j e_j, e_i \rangle - \hat{x}_i = 0,$$

于是由条件(iii)推出 $y - x = 0$，即 $s_n \to x (n \to \infty)$，这正表明 Fourier 展开式(6)成立.

式(8) 直接推出 $s_n \to x \Leftrightarrow \| s_n \|^2 \to \| x \|^2$，这正说明(i)⇔(iv). □

当 $\{e_i\}$ 满足 1.7.5 中条件(i) 时，称它为 X 的**标准正交基**. 1.7.5 表明，若 $\{e_i\}$

是 X 的标准正交基，则每个 $x \in X$ 有依 $\{e_i\}$ 的分解式(6)、模长公式(7)及易推出的内积公式

$$\langle x, y\rangle = \sum_i \hat{x}_i \overline{\hat{y}_i}. \tag{9}$$

由此可见，标准正交基正好起着 Euclid 空间中直角坐标系的作用，序列 $(\hat{x}_i)$ 相当于 x 关于基 $\{e_i\}$ 的"直角坐标"，有时就称为 x 关于基 $\{e_i\}$ 的**正交坐标**. 对应

$$T: X \to l^2, x \to (\hat{x}_i)$$

显然是一等距同构，这一同构保持内积的对应（参照(5)(9)）：

$$\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle,$$

因而 X 与 l^2 作为 Hilbert 空间实质上并无不同. 这样，借助于标准正交基实现了从 X 到 l^2 的转化.

以上结论的前提是某个标准正交基 $\{e_i\}$ 存在. 然而，必定有这样的基存在吗？回答是肯定的，而且有求出标准正交基的普遍方法. 设 X 是一个可分的无限维 Hilbert 空间①. 取线性无关的无限序列 $\{x_n\} \subset X$，使 $\{x_n\}$ 是 X 的基本集，然后依如下的 **Schmidt 正交化方法**将其标准正交化：令

$$\begin{cases} y_1 = x_1; \\ y_n = x_n - \sum\limits_{i=1}^{n-1} \dfrac{\langle x_n, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} y_i, \quad n = 2,3,\cdots; \\ e_n = y_n / \| y_n \|, \quad n = 1,2,\cdots, \end{cases} \tag{10}$$

则 $\{e_n\}$ 是一标准正交系且必满足 1.7.5 中条件(ii)，因此是 X 的标准正交基.

1.7.6 例 设 $J = [a,b]\,(a < b)$，则 $L^2(J)$ 是一个可分的无限维 Hilbert 空间（参看 1.3.8）. $L^2(J)$ 中常用的两类标准正交基是：

1° 多项式系. 取 $u_n = x^n, n = 0,1,\cdots$，则 $\{u_n\}$ 线性无关，且是 $L^2(J)$ 的基本集（参看 1.3.8）. 用 Schmidt 正交化方法得出一多项式系，它构成 $L^2(J)$ 的标准正交基. 当 $J = [-1,1]$ 时，所得的标准正交基就是著名的 **Legendre 多项式系** $\{L_n\}$.

2° 三角函数系. 取 $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2l}}\exp\dfrac{\mathrm{i}n\pi x}{l}, l = \dfrac{b-a}{2}, \mathrm{i} = \sqrt{-1}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$，则 $\{u_n\}$ 已经是一标准正交系（请验证！），且是 $L^2(J)$ 的基本集②，因此是 $L^2(J)$ 的标准正交基. $u \in L^2(J)$ 关于 $\{u_n\}$ 的 Fourier 展开式就是 u 在通常意义下的复数形式的 Fourier 级数.

如果说，标准正交基提供了向量沿互相正交的"坐标轴"的分解式，那么以下

---

① 应用上重要的 Hilbert 空间大都属此情况. 即使对不可分的 Hilbert 空间，适当推广标准正交基的定义之后，亦可指明它存在某种标准正交基.

② 可以指明：三角多项式之全体在 $C(J)$ 中稠密，因而亦在 $L^2(J)$ 中稠密.

定理提供了向量沿两个互相正交的子空间的分解式.

1.7.7 正交分解定理　设 A 是 Hilbert 空间 X 的闭子空间,则有直和分解

$$X = A \oplus A^{\perp}.$$

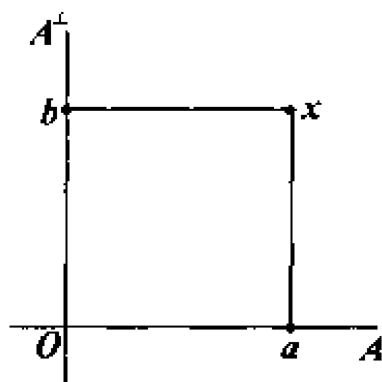


图 1 - 5

证　易直接验证 $A^{\perp}$ 是 X 的闭子空间,且 $A \cap A^{\perp} = \{0\}$,故只需证 $X = A + A^{\perp}$.

取定 $x \in X$,我们要求得 $a \in A$,使 $x - a \in A^{\perp}$(见图 1 - 5). 直观上,可想象 a 是从 x 引向 A 的垂线的"垂足". 取 $x_n \in A(n = 1,2,\cdots)$,使

$$\| x_n - x \| \to \rho \triangleq d(x,A) \quad (n \to \infty).$$

由中线公式(1.7.3)有

$$\begin{aligned}\| x_m - x_n \|^2 &= 2 \| x_m - x \|^2 + 2 \| x_n - x \|^2 \\ &\quad - 4\left\| \frac{x_m + x_n}{2} - x \right\|^2 \\ &\leqslant 2 \| x_m - x \|^2 + 2 \| x_n - x \|^2 - 4\rho^2 \to 0\end{aligned}$$

$(m,n \to \infty)$,可见 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列. 设 $x_n \to a \in A$(注意 A 闭!). 令 $b = x - a$,则 $x = a + b$, $\| b \| = \rho$. 余下只需证 $b \in A^{\perp}$,即 $\forall y \in A: \langle b,y \rangle = 0$. 取定 $y \in A$,不妨设 $y \neq 0$. $\forall \alpha \in \mathbf{K}$,有

$$\begin{aligned}\rho^2 &\leqslant \| x - (a + \alpha y) \|^2 = \| b - \alpha y \|^2 \\ &= \rho^2 - \bar{\alpha}\langle b,y \rangle - \alpha \langle y,b \rangle + |\alpha|^2 \| y \|^2.\end{aligned}$$

以 $\alpha = \langle b,y \rangle / \| y \|^2$ 代入得 $|\langle b,y \rangle|^2 \geqslant 2|\langle b,y \rangle|^2$,这推出 $\langle b,y \rangle = 0$. □

1.7.7 中的 $a \in A$ 是 A 中元对 x 的最佳逼近. 因 $(x - a) \perp A$,也称 a 是 x 在 A 上的**正投影**(参看 3.5.5). 若 $\{e_i\}$ 是一标准正交系, $A = \mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$,令 $\hat{x}_i = \langle x,e_i \rangle$,

$$a = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i e_i, \quad b = x - a, \tag{11}$$

则 $x = a + b, a \in A$,且不难直接验证 $b \in A^{\perp}$. 由分解的唯一性, a 就是 x 的最佳逼近. 公式(11)提供了在 Hilbert 空间中求最佳逼近的一简便方法. 试看一例.

1.7.8 例　在区间 $J = [-1,1]$ 上求最佳 2 次平均逼近 $u = 1/(1 + x^2)$ 的 2 次多项式.

解　依公式(11),所求 2 次多项式为

$$v = \langle u,L_0 \rangle L_0 + \langle u,L_1 \rangle L_1 + \langle u,L_2 \rangle L_2, \tag{12}$$

其中 L_n 是 Legendre 多项式(1.7.6),即

$$L_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, L_1 = x\sqrt{\frac{3}{2}}, L_2 = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1), \cdots.$$

算出

$$\langle u, L_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4};$$

$$\langle u, L_1\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2} = 0;$$

$$\langle u, L_2\rangle = \sqrt{\frac{5}{8}}\int_{-1}^{1}\frac{3x^2-1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{5}{2}}(3-\pi).$$

代入式(12)经整理后得

$$v = \frac{6\pi-15}{4} - \frac{15(\pi-3)}{4}x^2$$
$$\approx 0.9624 - 0.5310x^2.$$

$^{\triangle}$§1.8 度量空间与拓扑空间

本章前七节给出了 Banach 空间(包括其特款 Hilbert 空间)基础概念的一个梗概. Banach 空间理论为范围广泛的分析问题提供了一个适当的空间框架. 它不像 Hilbert 空间那样失之过窄,缺少回旋余地;也不像较之更一般的抽象空间那样失之过宽,以至无法充分利用平常 Euclid 空间中的许多有益启示. 因此,在以提供"基本的"泛函分析为宗旨的本书中,集中考虑 Banach 空间是很自然的. 但应立即指出,在现代抽象空间理论不断拓广的进程中, Banach 空间远不是一个终极概念. 更一般的空间概念的引进,不只是逻辑上的自然引伸,更受到范围广泛的理论与应用问题的推动. 对于"深入的"泛函分析来说,更一般的空间概念已经不可缺少,有些(如拓扑向量空间)甚至越来越处于中心地位. 现代抽象空间理论已如此庞大,本节的介绍至多使读者获得一点初步印象. 不过,对于有兴趣迈入这些空间领域的读者来说,这种印象还是有益的.

在§1.1 中,已在赋范空间中引进距离:

$$d(x,y) = \| x - y \|. \tag{1}$$

直接由范数公理(N_1)~(N_3)及定义式(1)推出,距离有性质:

(M_1) 对称性: $d(x,y) = d(y,x)$;

(M_2) 三角不等式: $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(y,z)$;

(M_3) 正定性: $d(x,y) \geqslant 0$; $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

如果撇开距离的定义式(1),仅仅以性质(M_1) ~ (M_3)作为出发点,就达到公理化的距离概念.

1.8.1 定义 设 X 是任一非空集. 若对 X 中任一对元 x, y,指定了一个实数 $d(x,y)$,称为 x 与 y 之间的距离,它满足**度量公理**(M_1) ~ (M_3),则称距离函数

$d(x,y)$ 为 X 上的一个度量,称 X(或写作(X,d))为**度量空间**.

由此定义,任何赋范空间依(1)所定义的度量 d 是度量空间.与赋范空间的重大区别是,度量空间不受任何代数关系的约束,因而在运用时具有更大的灵活性.但因此却远不能达到如赋范空间那样丰富的结果.

设(X,d)是给定的度量空间.若$\{x_n\}\subset X$是一序列,$x\in X$,$d(x_n,x)\to 0(n\to\infty)$,则说$\{x_n\}$收敛于 x,记作 $x_n\to x(n\to\infty)$.若

$$\lim_{m,n} d(x_m,x_n)=0 \tag{2}$$

(对照§1.1(9)),则称$\{x_n\}$为 Cauchy 列.若 X 中所有 Cauchy 列收敛,则称 X 为**完备度量空间**(Fréchet,1906).参照§1.1 知 Banach 空间是完备度量空间.实际上,Banach 空间的任何非空闭子集都是完备度量空间.对应于§1.3(1)(2),度量空间中的开球与闭球分别定义为:

$$B_r(a)=\{x\in:\ d(x,a)<r\};$$

$$\bar{B}_r(a)=\{x\in:\ d(x,a)\leqslant r\}.$$

将§1.3~§1.6中的概念与结论移植于度量空间,基本上是一种例行的推广,要作的往往是将 $\|x-y\|$ 换成 $d(x,y)$,将"Banach 空间的闭子集"换成完备度量空间而已.但也应注意到,那些实质上依赖于一定代数关系的结论(例如1.5.7),显然不能推广于度量空间.将§1.3~§1.6的内容作一番仔细审察,从其中挑出那些可推广于度量空间的结论,无疑是一种极有益的练习,有兴趣的读者不妨一试.

下面是一个不可赋范的度量空间的例子.

1.8.2 例　考虑 $\mathbf{R}$ 上的连续函数之全体 $C(\mathbf{R})$.对任给 $u\in C(\mathbf{R})$,令

$$\|u\|_n=\sup_{|x|\leqslant n}|u(x)|,\quad n=1,2,\cdots;$$

$$\|u\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\|u\|_n}{1+\|u\|_n}.$$

此处尽管用了记号 $\|u\|$,但并不意味着它是一个范数.不过 $\|u\|$ 确有类似于范数的性质:

(i) $\|-u\|=\|u\|$;

(ii) $\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\|$;

(iii) $\|u\|\geqslant 0$; $\|u\|=0\Leftrightarrow u=0$(即 $u(x)\equiv 0$).

其中性质(i)(iii)是明显的;性质(ii)的验证基于不等式

$$\frac{|u+v|}{1+|u+v|}\leqslant\frac{|u|}{1+|u|}+\frac{|v|}{1+|v|}.$$

现令 $d(u,v)=\|u-v\|$ $(u,v\in C(\mathbf{R})$,则显然 d 满足公理$(\mathrm{M}_1)\sim(\mathrm{M}_3)$,因此$(C(\mathbf{R}),d)$是一个度量空间.若 $u,u_k\in C(\mathbf{R})(k=1,2,\cdots)$,则当 $k\to\infty$ 时,

$$d(u_k,u)\to 0\Leftrightarrow \lim_k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\|u_k-u\|_n}{1+\|u_k-u\|_n}=0$$
$$\Leftrightarrow \lim_k\|u_k-u\|_n=0\quad(\forall n\in\mathbf{N})$$
$$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbf{N},\text{在}[-n,n]\text{上 } u_k\rightrightarrows u.$$

若 $\{u_k\}\subset C(\mathbf{R})$ 是一 Cauchy 列，则限制在每个区间 $[-n,n]$ 上，$\{u_k\}$ 依 sup 范数是 Cauchy 列. 于是有 $u\in C(\mathbf{R})$，使得在每个区间 $[-n,n]$ 上 $u_k\rightrightarrows u$，从而 $d(u_k,u)\to 0(k\to\infty)$. 这表明 $(C(\mathbf{R}),d)$ 是一完备度量空间.

很容易看出，依 1.8.2 所定义的度量，在 $C(\mathbf{R})$ 中 $u_k\to u(k\to\infty)$ 相当于在任何有限区间上 $u_k\rightrightarrows u(k\to\infty)$. 这种收敛性十分自然，且即使用初等分析的语言也能被明白描述，但却不能纳入依范数收敛的概念之内，这一事实足以显示出赋范空间概念的局限性，而度量空间概念则在一定程度上弥补了这一局限性.

然而，对于各种分析问题的描述，度量空间概念依然不足为用. 即使在看来很初等的问题上，度量空间的局限性亦能表现出来，下面就是一个很初等的例子.

1.8.3 例 以 F 记 $\mathbf{R}$ 上的实函数之全体，任给 $u,u_n\in F(n=1,2,\cdots)$，定义

$$u_n\to u\Leftrightarrow\forall x\in\mathbf{R}:u_n(x)\to u(x)\quad(n\to\infty),$$

即 F 中的收敛就是"处处收敛". 这种收敛性当然极为简易初等且不乏其用，但它却不能由任何度量定义.[①]

这样，我们又走到了一个进入新的空间领域的路口，路标指向所谓拓扑空间[②]，它比度量空间要宽泛得多，足以消除如 1.8.3 所揭示的那种缺憾.

回忆一下 §1.3 中曾提到，一个赋范空间 X 中的开集之全体(记作 τ)有以下性质：

(O_1) $X\in\tau$;

(O_2) $\{A_i:i\in I\}\subset\tau\Rightarrow\bigcup A_i\in\tau$;

(O_3) $\{A_i:1\leqslant i\leqslant n\}\subset\tau\Rightarrow\bigcap A_i\in\tau$.

上述结论同样也适用于度量空间. 我们自然推想，这些性质根本不应与范数或度量发生必然联系，它们自身应该成为一个更一般的概念的出发点. 这就导致以下定义.

1.8.4 定义 设 X 是任一非空集. 若已指定了一个集族 $\tau\subset 2^X$，每个 $A\in\tau$ 称为开集，τ 满足开**集公理** $(O_1)\sim(O_3)$，则称 τ 为 X 上的一个**拓扑**，称 (X,τ) 为一

---

① 这一结论的严格证明依赖于较深入的知识.

② 实际上，介于度量空间与拓扑空间之间，还有一些中间类型的抽象空间，但其重要性不及拓扑空间与度量空间.

个拓扑空间.

据此定义,任何度量空间都是拓扑空间,其中的拓扑(即开集族)称为**度量拓扑**;特别,任何赋范空间(及其每一非空子集)都是拓扑空间,其中的拓扑称为**范数拓扑**.更特殊点,$\mathbf{R}^n$ 依范数拓扑是拓扑空间(由 1.1.6,这种拓扑与范数选取无关).另一方面,远不能说拓扑空间是度量空间.要举出非度量空间的拓扑空间例子实在易于反掌.例如,设 X 是任一多于一点的集,令 $\tau=\{X,\varnothing\}$,则显然 τ 已满足公理$(O_1)\sim(O_3)$,因而(X,τ)是一拓扑空间,τ 称为 X 上的平凡拓扑.但平凡拓扑绝不可能是度量拓扑.

一个颇具吸引力的问题是在拓扑空间中展开类似于 §1.3 ~ §1.6 的理论.考虑到除抽象的公理$(O_1)\sim(O_3)$之外,现在别无其他结构可用,拓扑空间理论的展开似乎充满困难且内容贫乏.然而,实际上开集公理$(O_1)\sim(O_3)$蕴涵了一个异常丰富的理论,而且其基础部分与赋范空间中的点集论极为相似,以至无需太多的改动即可将 §1.3 ~ §1.5 中的许多内容移植到拓扑空间.当然这一移植过程仍然有不少技术性困难需要克服,而且深入的展开将遇到更多的困难.所有这些都只能从拓扑学的专书中获得了解,本节充其量走出开头的几步,以使读者获得最初步的印象.

以下设(X,τ)是一取定的拓扑空间.为移植 §1.3 中的概念,我们用开集来起赋范空间中的球的作用.

1.8.5 定义 设 $A\subset X, x\in X$.若存在 $V\in\tau$,使 $x\in V\subset A$,则称 x 为 A 的内点,而称 V 为 x 的邻域.以 A° 记 A 的内点之全体,称它为 A 的内部.若对 x 的任何邻域 V 有 $A\cap V\neq\varnothing$,则称 x 为 A 的触点.以 $\bar{A}$ 记 A 的触点之全体,称它为 A 的闭包.称 $\partial A\triangleq\bar{A}\setminus A^\circ$ 为 A 的边界.若 $A=\bar{A}$,则称 A 为闭集.若 $\bar{A}=X$,则称 A 为 X 中的稠集.

1.3.3 与 1.3.5 的(i)(iii)可完全推广于拓扑空间;1.3.5 的(ii)则不再是一个要证明的结论,而是整个理论的前提假设.尽管仍可验证 A 为开集 $\Leftrightarrow A=A^\circ$,但已不像 1.3.4 中一样需要依此来定义开集.

关于连续性的定义 1.4.2 需加改造后方可用于拓扑空间.

1.8.6 定义 设 X, Y 是两个拓扑空间,$F:X\to Y$.若 $\forall x\in X$,对任给 Fx 在 Y 中的邻域 V,有 x 的邻域 U,使 $FU\subset V$,则称 F 为连续映射.以 $C(X,Y)$ 记从 X 到 Y 的连续映射之全体.若 $F\in C(X,Y)$ 是一双射且 $F^{-1}\in C(Y,X)$,则说 F 是一个**同胚**.当存在从 X 到 Y 的同胚时说 X 与 Y 互相**同胚**.

互相同胚的拓扑空间可以不加区别.

易见关于连续映射的定理 1.4.3 与 1.4.4 亦适用于拓扑空间.

关于紧性的定义 1.5.1 无需改动就可用于拓扑空间;关于紧集等价刻画的 1.5.3,1.5.4 对于拓扑空间亦有适当的推广,但这涉及到一些较复杂的概念.

关于第一纲性的定义1.6.1显然亦适用于拓扑空间.但Baire定理并不适用于任意的拓扑空间.不过,对一类特殊的拓扑空间,即所谓局部紧空间,可应用Baire定理(1.6.2).

设 $x, x_n \in X(n = 1,2,\cdots)$. 若对 x 的任给邻域 V, $\exists N, \forall n \geqslant N: x_n \in V$, 则说序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 记作 $x_n \to x(n \to \infty)$. 这与度量空间中的极限定义实质上并无区别,但极限性质则差异甚大. 例如,倘不对 X 加新的假设,我们甚至不能证明极限的唯一性;也不能如1.3.2一样,断言 $x \in \bar{A} \Leftrightarrow$ 有 A 中的序列收敛于 x. 正是这类"病态"造成了展开拓扑空间理论的困难.

最后,我们再回到例1.8.3,考虑在 F 上引进某种拓扑. 任给 $u \in F, x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$, 令

$$U(u, x_1, \cdots, x_n, \varepsilon) = \{v \in F : |u(x_i) - v(x_i)| < \varepsilon(1 \leqslant i \leqslant n)\} \quad (3)$$

以 τ 记形如(3)的集的并之全体,今证 τ 是 F 上的一个拓扑. 显然 τ 满足开集公理 (O_1), (O_2). 为证 (O_3), 只需验证:任意两个形如(3)的集的交属于 τ. 任取 $u, v \in F, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_m \in \mathbf{R}(n < m), \varepsilon, \delta > 0$; 设

$$w \in U(u, x_1, \cdots, x_n, \varepsilon) \cap U(v, x_{n+1}, \cdots x_m, \delta).$$

令

$$\eta = \min\{\varepsilon - |u(x_i) - w(x_i)|,$$
$$\delta - |v(x_j) - w(x_j)| : 1 \leqslant i \leqslant n < j \leqslant m\}.$$

任给 $z \in U(w, x_1, \cdots, x_m, \eta)$, 有

$$|z(x_i) - u(x_i)| \leqslant |z(x_i) - w(x_i)| + |w(x_i) - u(x_i)|$$
$$< \eta + |w(x_i) - u(x_i)| \leqslant \varepsilon \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

可见 $z \in U(u, x_1, \cdots, x_n, \varepsilon)$; 同理 $z \in U(v, x_{n+1}, \cdots, x_m, \delta)$. 故有

$$U(w, x_1, \cdots, x_m, \eta) \subset U(u, x_1, \cdots, x_n, \varepsilon) \cap U(v, x_{n+1}, \cdots, x_m, \delta),$$

由此推出 $U(u, x_1, \cdots, x_n, \varepsilon) \cap U(v, x_{n+1}, \cdots, x_m, \delta) \in \tau$.

给定 $u, u_n \in F(n = 1,2,\cdots)$, 设依 F 中的拓扑有 $u_n \to u(n \to \infty)$. $\forall x \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$, $U(u, x, \varepsilon)$ 是 u 的一个邻域,因此 $\exists N, \forall n \geqslant N: u_n \in U(u, x, \varepsilon)$, 这意味着

$$|u_n(x) - u(x)| < \varepsilon \quad (\forall n \geqslant N),$$

可见 $u_n(x) \to u(x)(n \to \infty, \forall x \in \mathbf{R})$, 即在 $\mathbf{R}$ 上 $\{u_n\}$ 处处收敛于 u. 不难指明,这亦是依 F 中的拓扑 $u_n \to u$ 的充分条件. 这样,我们就成功地将"处处收敛"纳入了依拓扑收敛的概念之内,而在度量空间的框架内却无法做到这一点.

△§1.9 某些结论的证明

1.1.6 之证 不妨设 $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{C}$ 的情况可类似证明), 且只需证 X 与 $\mathbf{R}^n$

拓扑同构,其中 $\mathbf{R}^n$ 中采用 Euclid 范数.

取 X 的一个基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. 定义

$$T: \mathbf{R}^n \to X, \lambda = (\lambda_i) \to \sum \lambda_i e_i,$$

则 T 为线性同构. $\forall \lambda, \lambda' \in \mathbf{R}^n$,有

$$\begin{aligned} |\, \| T\lambda \| - \| T\lambda' \| \,| &\leqslant \| T\lambda - T\lambda' \| = \| T(\lambda - \lambda') \| \\ &= \left\| \sum (\lambda_i - \lambda_i') e_i \right\| \leqslant \sum |\lambda_i - \lambda_i'| \, \| e_i \| \\ &\leqslant |\lambda - \lambda'| \left(\sum \| e_i \|^2 \right)^{1/2} \quad (\text{用 Cauchy 不等式}), \end{aligned}$$

可见 $\| T\lambda \|$ 是关于 $(\lambda_i) \in \mathbf{R}^n$ 的 n 元实连续函数. 由熟知的实分析结果(如参考[13, Th.1.6.6]), $\| T\lambda \|$ 在单位球面

$$S = \{\lambda \in \mathbf{R}^n : |\lambda| = 1\}$$

上取得最小值 α 与最大值 β,且必 $\alpha > 0$(注意 $T\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$). $\forall \lambda \in \mathbf{R}^n$,当 $\lambda \neq 0$ 时 $\lambda / |\lambda| \in S$,于是

$$\alpha |\lambda| \leqslant \| T\lambda \| = |\lambda| \, \| T(\lambda / |\lambda|) \| \leqslant \beta |\lambda|.$$

不等式 $\alpha |\lambda| \leqslant \| T\lambda \| \leqslant \beta |\lambda|$ 当然亦适用于 $\lambda = 0$. 因此 T 是一个拓扑同构.

□

1.2.2 之证 设 $\mathbf{Q} = \{r_n : n \in \mathbf{N}\}$. 取开区间 δ_n,使 $r_n \in \delta_n (n = 1, 2, \cdots)$, $\sum m\delta_n < \infty$, m 是 Lebesgue 测度. 令 $u_n = \chi_{\delta_n}$, $v_n = \sum_1^n u_i$, $v = \sum_1^\infty u_i$. 显然 $v_n \in R^1(J)$, $v \in L^1(J)$,

$$\begin{aligned} \| v_n - v \|_1 &= \int_a^b \sum_{i>n} u_i \mathrm{d}m \\ &= \sum_{i>n} m\delta_i \to 0 \quad (n \to \infty), \end{aligned}$$

可见 $v_n \xrightarrow{L^1} v$. 但 $v \bar{\in} R^1(J)$,否则有 J 上几乎处处连续的有界函数 w(参考[13, Th.3.4.1]),使得在 J 上 $v = w$, a.e.. 取 $k \in \mathbf{N}$,使 $w(x) < k (\forall x \in J)$. 取 $r_{n_1} \in J$; 次取 $r_{n_2} \in J \cap \delta_{n_1}$, $n_2 > n_1, \cdots$,相继取出 $r_{n_k} \in J \cap \delta_{n_1} \cap \cdots \cap \delta_{n_{k-1}}$. 令

$$\delta = J \cap \delta_{n_1} \cap \cdots \cap \delta_{n_k},$$

则 $\delta \subset J$, $m\delta > 0$,在 δ 上 $v \geqslant k > w$,这与 $v = w$, a.e. 矛盾. 因此 $R^1(J)$ 在 $L^1(J)$ 中是非闭的. □

1.5.3 之证 (i)⇒(ii). 设 A 是紧集,但 $\bigcap B_n = \varnothing$,则 $\bigcup B_n^c = X$,因而 $\{B_n^c\}$ 是 A 的开覆盖,于是对某个充分大的 n 有

$$B_n \subset A \subset \bigcup_{i=1}^n B_i^c = B_n^c,$$

这与 $B_n \neq \varnothing$ 相矛盾. 因此 $\bigcap B_n \neq \varnothing$.

(ii)⇒(iii). 设条件(ii)满足. 任取 A 中的序列 $\{x_n\}$, 不妨设 x_n 互不相同. 令 $B_n = \{x_i : i \geqslant n\}(n = 1,2,\cdots)$. 若 $\{x_n\}$ 没有收敛子列, 则每个 B_n 为闭集. 显然 $A \supset B_1 \supset B_2 \supset \cdots$, $\bigcap B_n = \varnothing$, 这与条件(ii)矛盾. 因此 $\{x_n\}$ 必有收敛子列.

(iii)⇒(iv). 设条件(iii)满足. 若 A 非全有界, 则有 $r > 0$, A 不被任何有限个半径为 r 的球覆盖. 任取 $x_1 \in A$, 必有

$$\begin{aligned} &x_2 \in A \setminus B_r(x_1), \\ &x_3 \in A \setminus [B_r(x_1) \cup B_r(x_2)], \\ &\quad\vdots \\ &x_n \in A \setminus \bigcup_{i<n} B_r(x_i), \quad n = 2,3,\cdots. \end{aligned}$$

如此所得序列 $\{x_n\} \subset A$ 显然满足

$$\| x_m - x_n \| \geqslant r \quad (m \neq n).$$

这样的序列不可能有收敛子列, 这与条件(iii)矛盾. 因此 A 必全有界.

(iv)⇒(i). 设 A 全有界. 若 A 非紧, 则有 A 的开覆盖 $\mathscr{U}$, 它无有限子覆盖. 由全有界性, 可取有限个半径为 1 的球覆盖 A, 其中必有一个, 记作 B_1, 使 $A \cap B_1$ 不被 $\mathscr{U}$ 中有限个集覆盖. 又取有限个半径为 1/2 的球覆盖 A, 其中必有一个, 记作 B_2, 使 $A \cap B_1 \cap B_2$ 不被 $\mathscr{U}$ 中有限个集覆盖. 如此继续, 得到一列球 $\{B_n\}$, B_n 的半径为 $1/n$, $A_n \triangleq A \cap B_1 \cap \cdots \cap B_n$ 不被 $\mathscr{U}$ 中有限个集覆盖. 任取 $x_n \in A_n(n = 1,2,\cdots)$, 则当 $m > n$ 时 $\| x_m - x_n \| \leqslant 2/n$, 因此 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列. 由完备性, 有 $x \in A$: $x_n \to x(n \to \infty)$. 因 $\mathscr{U}$ 覆盖 A, 故有 $U \in \mathscr{U}$: $x \in U$. 因 x 是 U 的内点, $x_n \in A_n$, 而

$$\operatorname{diam} A_n \leqslant \operatorname{diam} B_n \to 0 \quad (n \to \infty),$$

故当 n 充分大时必 $A_n \subset U$, 这显然与 A_n 的构成相矛盾. 因此 A 为紧集. □

注. 若不假定 X 完备, 则可证明(i)⇔(ii)⇔(iii)⇒(iv). 事实上, 在证明(i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)时并未用到完备性. 若假定条件(iii)(因而(iv))满足, A 非紧, 然后依上面的最后一段证明得出 Cauchy 列 $\{x_n\}$, 则 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$. 设 $x_{n_k} \to x \in A$, 则如前面的证明一样可得出矛盾.

1.5.9 之证 首先设 A 在 $C(J)$ 中相对紧, 则 A 必有界(1.5.4), 这等价于一致有界. 若 A 非等度连续, 则存在 $\varepsilon > 0$, $u_n \in A$, $x_n, y_n \in J(n = 1,2,\cdots)$, 使 $|x_n - y_n| \to 0(n \to \infty)$, 而

$$|u_n(x_n) - u_n(y_n)| \geqslant \varepsilon, \quad n = 1,2,\cdots. \tag{1}$$

因 J 紧而 A 相对紧, 不妨设 $x_n \to x \in J$, $u_n \rightrightarrows u \in C(J)(n \to \infty)$. 显然亦有 $y_n \to x$. 这结合(1)有

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leqslant |u_n(x_n) - u_n(y_n)| \\ &\leqslant |u_n(x_n) - u(x_n)| + |u(x_n) - u(x)| \\ &\quad + |u(x) - u(y_n)| + |u(y_n) - u_n(y_n)| \to 0 \quad (n \to \infty),\end{aligned}$$

得出矛盾.

其次,设 1.5.9 中条件(i)(ii)满足.以 $\{r_n : n \in \mathbf{N}\}$ 记 J 中有理数之全体.任取序列 $\{u_n\} \subset A$. 由条件(i),数列 $\{u_n(r_1)\}$ 有界,因此有收敛子列,记作 $\{u_n^1(r_1)\}$.同理,$\{u_n^1(r_2)\}$ 有收敛子列 $\{u_n^2(r_2)\}$.如此得到 $\{u_n\}$ 的无限个子列 $\{u_n^k\}$,$k = 1,2,\cdots$.取其"对角线序列"$\{u_n^n\}$,令 $v_n = u_n^n$,则 $\{v_n\}$ 是 $\{u_n\}$ 的子列,对每个 $k(k = 1,2,\cdots)$,$\{v_n(r_k)\}$ 收敛. $\forall \varepsilon > 0$,取如条件(ii)中的 $\delta > 0$.将 J 等分为长度 $< \delta$ 的区间 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_k$;不妨设 $r_i \in \Delta_i (1 \leqslant i \leqslant k)$.取 $N > 0$,使得

$$|v_m(r_i) - v_n(r_i)| < \varepsilon (\forall m, n \geqslant N, 1 \leqslant i \leqslant k).$$

$\forall x \in J$,设 $x \in \Delta_i$,则当 $m, n \geqslant N$ 时有

$$\begin{aligned}|v_m(x) - v_n(x)| &\leqslant |v_m(x) - v_m(r_i)| + |v_m(r_i) - v_n(r_i)| \\ &\quad + |v_n(r_i) - v_n(x)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,\end{aligned}$$

这表明 $\| v_m - v_n \|_0 < 3\varepsilon (\forall m, n \geqslant N)$.可见 $\{v_n\}$ 是 $C(J)$ 中的 Cauchy 列,从而是 $\{u_n\}$ 的收敛子列.因此 A 为相对紧集. □

评　注

1.抽象空间　抽象空间理论的提出,一方面为 19 世纪后期因更新数学基础而引发的公理化浪潮所推动,另一方面则是试图将经典分析拓展到函数空间上去的一系列探索的结果.

引进函数空间的必要性,在 19 世纪下半叶逐渐被一些数学家认识到. Ascoli(1883),Volterra(1887),Arzela(1889),Hadamard(1897)及 Borel 等人都曾以各自的方式表达了应将函数看作点的观点.在建立抽象空间理论的道路上,第一项里程碑式的工作属于 Fréchet(1906). Fréchet 力图以 Cantor 集合论的语言,统一自 Ascoli 至 Hadamard 等人的思想,建立一种抽象的点集论,其中包含了 Cantor 点集论中许多概念与命题的推广.为了给点集概念一个空间框架,Fréchet 引入了度量空间概念.

Hilbert 关于几何基础的奠基性工作令人信服地证明,依靠公理化方法,能完成何等辉煌的理论建筑.在 Hilbert 的鼓舞下尝试着建立抽象空间理论的数学家,所使用的公理体系形式上远比初等几何公理系统简单,而由其展开的系统则具有更大的包容性,因而有更广阔的应用前景.最初的成果已使开拓者们欢欣不已.

作为公理化数学的坚定倡导者,Hilbert 直接参与了抽象空间理论的开发.正是 Hilbert 本人打开了从 Euclid 空间通向 l^2 空间的道路,l^2 空间可看作最接近 Euclid空间的无限维空间.Hilbert 在研究无穷线性方程组时考虑了满足 $\sum |x_n|^2 < \infty$ 的数列$\{x_n\}$.然而,Hilbert却止步于l^2空间的门槛之前,正式引入 l^2 空间概念的任务是由 Schmidt 与 Fréchet 完成的,他们研究了 l^2 空间中的度量、完备性与可分性.现在通用的范数记号 $\|\cdot\|$,就是 Schmidt(1907) 首先用于 l^2 中.Lebesgue 积分创立(1902) 之后,正在创立无穷维空间理论的数学家立即认识到空间 L^2 的重要性;1907 年,Schmidt 与 Fréchet 实现了从空间 l^2 到 L^2 的过渡.几乎在同时,Riesz 与 Fischer 发现了空间 l^2 与 $L^2[a,b]$ 之间的同构性,这是 Lebesgue 理论引人注目的早期胜利之一.此后,空间理论的进一步的开拓更不可遏止.1910 年,Riesz 研究了 L^p 空间,证明了有关 L^p 空间的主要结果. Banach, Hahn, Helly, Wiener 几乎同时(1922)引进了赋范空间.关于这种空间的理论在 Banach 于十年后出版的经典性著作《Théorie des opérations Lineaires》中已经相当成熟,以Banach命名这类空间是顺理成章的.至于 Hilbert 空间的公理化定义,则迟至 1927 年才首次出现于 Von Neumnn 的论文中.然而,Banach 等人的工作并未结束迈向抽象空间的历史性进军,这一迈进几乎占据了整个 20 世纪,甚至迄今余波未息.当代理论数学飘然于名目繁多的抽象空间中,这在很大程度上要归因于泛函分析的早期开拓者.

2. Banach 空间 与一些流行的泛函分析教材不同,本书不以度量空间,而以 Banach 空间作为主要的空间框架,乃是反复权衡后的选择.首先,应用上最常见的空间无疑是 Banach 空间,特别精致的理论甚至需要 Hilbert 空间.其次,任何度量空间——适当改赋度量之后——都可嵌入到某个 Banach 空间中,因此,以 Banach空间取代度量空间逻辑上几乎没有什么损失.最主要的是,在唤起读者对于通常 Euclid 空间的直观形象的联想方面,Banach 空间显然远胜于度量空间,对于初学者而言尤其如此.因此,本章的材料主要沿 Banach 空间这一主要线索展开,只是在§1.8 中指明,在 Banach 空间中有意义的那些概念与结论,只要仅用到度量而不涉及代数结构,都可推广于度量空间,而且为此而须额外付出的代价是微不足道的.

3. 抽象方法的简化作用 通过引进函数空间,进而提升到更一般的 Banach 空间、度量空间等,许多分析学问题被赋予了完全不同的表达形式,以至初看起来与原来的问题几乎没有共同之处.例如,用 n 次多项式平方平均逼近某一给定函数的问题,现在竟然变成了:求 Hilbert 空间中某一点到某个子空间上的正投影!不习惯抽象方法的人,突然面对一大堆陌生的名词,不免深感惶惑.人们付出了失去问题原型性的代价,这值得吗?

近一个世纪期间泛函分析所带来的辉煌成果应当能够证明,将具体问题抽象

化是值得的.本书所能提供的例证固然有限,但已能说明问题.从方法论的角度考虑,究竟是哪些因素使抽象方法富有效力呢?让我们作一简要分析.

(A) 一个具体问题一旦被纳入抽象空间的框架之内,原来本身很复杂的对象(如函数、序列、曲线、曲面、矩阵、变换等)现在不过是空间中一个**点**而已,无论这个点内部原来具有多大的复杂性,都一概被抹去,在进一步的研究中不再起任何作用,这就使问题大大简化了.对于问题的最终解决,被抹去的那些东西,本来就是不起作用的,倒是它们的存在掩盖了本质性的因素,一旦舍弃这些细节,本质的东西就凸显出来.例如,Cauchy 不等式(§1.2(10))在外观上并不简单.实际上,该不等式中和 $\sum x_i y_i$ 的特殊结构并非本质的东西.如果令 $x=(x_i)$,$y=(y_i)$,该不等式就转化成了 $|\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|_2\|y\|_2$,原来它不过是 Schwarz 不等式的特例而已.

(B) 通过与通常 Euclid 空间的类比,抽象空间能获得一定的直观形象,因此使得在抽象空间中进行的逻辑论证更好理解.以为一个分析问题的原型是具体的、直观的,而转化成抽象空间中的问题后变得笼统、抽象以至无从捉摸了,实在是一种极大的误解.例如,设 $\{L_i\}$ 是 Legendre 多项式系,$f\in L^2[-1,1]$,则

$$f_n(x)=\sum_{i=0}^{n}L_i(x)\int_{-1}^{1}f(t)L_i(t)\mathrm{d}t$$

是 $[-1,1]$ 上最佳均方逼近 $f(x)$ 的 n 次多项式.如果没有 Hilbert 空间概念,你能说这一结论是直观上好理解的吗?**经抽象化处理的问题往往更直观**,不明白这一点,就难以领会泛函分析的奥妙.

(C) 抽象化方法用高度概括的形式统一了外观上极不相同的问题,从而沟通了一些初看起来互不相关的领域,这就为获取新知识开辟了更多的渠道.例如,既然实 Hilbert 空间中任何 n 维子空间与 $\mathbf{R}^n$ 并无实质区别,就不妨将 $\mathbf{R}^n$ 中各种已知结论直接移用于该子空间.这样做是十分经济有效的.

4. 拓扑同构 各种意义下的"同构"概念在抽象空间理论中有基本的意义.简单地说,互相同构的空间就所涉及的结构而言,并无实质不同,只是形式有别,因而不妨互相替代,以便带来简化.例如,所有 n 维实 Banach 空间互相"拓扑同构",因此就涉及收敛性与向量线性关系的问题而言,仅考虑空间 $\mathbf{R}^n$ 就足够了.再如,任何无限维可分 Hilbert 空间等距同构于 l^2,因此,形式上似乎很不同的空间 l^2,$L^2[a,b]$ 与 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 等实质上毫无差别!基于此,我们完全可以将对 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 等的研究转化为对 l^2 的研究.

习题 A

以下和以后为简明计，在习题陈述中往往省略“求证”或“证明”二字.

1. $|d(x,A)-d(y,A)|\leqslant\|x-y\|$.

2. 证明 1.1.4.

3. Banach 空间中的绝对收敛级数必收敛.

4. $\forall n\in\mathbf{N},\exists C_n>0$，对任何多项式 $u(x)=\sum_0^n a_i x^i$，有

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|u(x)|\leqslant C_n\sum|a_i|.$$

5. 设在$[0,1]$上 $u_n\rightrightarrows u$，u_n 是多项式且其次数有界，则 u 为多项式.

6. 对 $p=\infty$ 证明 1.2.1.

7. $l^p(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 是 Banach 空间.

8. 收敛数列之全体 c 依 sup 范数是 Banach 空间.

9. 设 X 是只含有限个非零项的数列之全体，在 X 中使用 sup 范数，求其完备化.

10. 设 X,Y 是 §1.2(8) 所示空间链中的两个空间，$X\subset Y$. 若在 X 中 $u_n\to u$，则在 Y 中亦有 $u_n\to u$.

11. 开球是开集，闭球与球面是闭集，球面是其内部的边界.

12. A° 是含于 A 的最大开集；$\bar{A}$ 是包含 A 的最小闭集.

13. $C^1(J)$ 在 $C(J)$ 中不是闭集.

14. 设 $A,B\subset X$ 是互不相交的闭集，则存在开集 G,H，使得 $A\subset G,B\subset H,G\cap H=\varnothing$.

15. 若 Y 是 X 的完备化，则 X 可分$\Leftrightarrow Y$ 可分.

16. $L^p(\mathbf{R})(1\leqslant p<\infty)$ 可分.

17. 就“闭”的情形证 1.4.3.

18. $F:X\to Y$ 连续$\Leftrightarrow\forall A\subset X:F\bar{A}\subset\overline{FA}$.

19. $x\to d(x,A)$ 是连续泛函.

20. $\{x:d(x,A)<r\}$ 是开集.

21. $C[a,b]\to\mathbf{K},u\to\int_a^b|u(x)|^2dx$ 是连续泛函.

22. $\mathrm{BV}[a,b]\cap C[a,b]\subset C[a,b]\to\mathbf{R},u\to V_a^b(u)$ 是连续泛函.

23. 若 F_n 连续，$F_n\rightrightarrows F$，则 F 连续.

24. 若 $A,B\subset X$ 是互不相交的闭集，则存在 $f\in C(X,[0,1])$，使 $f(A)=0,f(B)=1$.

25. 在有限维空间中，有界$\Leftrightarrow$全有界.

26. 设 X 完备，$B_n\subset X$ 是非空闭集，$B_1\supset B_2\supset\cdots$，$\mathrm{diam}B_n\to 0$，则 $\bigcap B_n$ 仅含一点.

27. 连续映射映紧集为紧集.

28. 若 A 是紧集，则 $\forall\varepsilon>0$，存在有限集 $B\subset A$，使 $\forall x\in A:d(x,B)<\varepsilon$.

29. 若 A,B 为紧集，则 $\exists a\in A,b\in B$，使 $\|a-b\|=d(A,B)$.

30. 若 A 为紧集，B 为闭集，$d(A,B)=0$，则 $A\cap B\neq\varnothing$.

31. 若 A 为紧集，B 为闭集，则 $A+B$ 是闭集.

32. 设 $D\subset X$ 是紧集，$f:D\to\mathbf{R}$ 下半连续(即 $x_n\to x\in D\Rightarrow f(x)\leqslant\varliminf_n f(x_n)$)，则 $f(x)$ 在 D 上取得最小值.

33. 若 $A\subset X$ 是有限维子空间，$x\in X$，则有 $a\in A$：$\|x-a\|=d(x,A)$.

34. $\forall u\in C(J)$，存在次数 $\leqslant n$ 的多项式对 u 的最佳一致逼近.

35. 设 $A\subset C[a,b]$ 一致有界，$\tilde{u}(x)=\int_a^x u(t)\mathrm{d}t$，则 $\{\tilde{u}:u\in A\}$ 在 $C[a,b]$ 中相对紧.

36. Banach 空间中可数个稠开集之交是稠集与第二纲集.

37. 赋范空间的真子空间不含内点，真闭子空间是疏集.

38. $C(J)$ 中的非负函数之集是第二纲集.

39. $L^p(J)$ 中的非负函数之集是疏集($1\leqslant p<\infty$).

40. $C[-1,1]$ 中的偶函数之集是疏集.

41. 在内积空间中，$x_1,\cdots,x_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 矩阵 $G=(\langle x_i,x_j\rangle)$ 可逆.

42. 非零向量组成的正交系必线性无关.

43. $C[0,1]$ 中的 sup 范数不能由内积定义.

44. 空间 $l^p(p\neq 2)$ 不是内积空间.

45. $x\perp y\Leftrightarrow\forall\alpha\in\mathbf{K}$：$\|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\|$.

46. $x\perp y\Leftrightarrow\forall\alpha\in\mathbf{K}$：$\|x+\alpha y\|\geqslant\|x\|$.

47. 若 $\{e_n\}$ 是标准正交系，则 $\left|\sum\langle x,e_n\rangle\overline{\langle y,e_n\rangle}\right|\leqslant\|x\|\|y\|$.

48. 在 Hilbert 空间中，$A^\perp=\overline{\mathrm{span}A}^\perp$，$A^{\perp\perp}=\overline{\mathrm{span}A}$.

49. B 是 Hilbert 空间 X 的基本集 $\Leftrightarrow B^\perp=\{0\}$.

50. 用 Schmidt 正交化方法求 Legendre 多项式 $L_n(n=0,1,2)$.

习题 B

51. 设 $\{x_n\}\subset X$. 若 $\forall\varepsilon>0$，存在 Cauchy 列 $\{y_n\}\subset X$，使 $\|x_n-y_n\|<\varepsilon(\forall n\in\mathbf{N})$，则 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列.

52. 赋范空间 X 完备 $\Leftrightarrow X$ 中绝对收敛级数皆收敛.

53. 设 $\{x_i:1\leqslant i\leqslant n\}\subset X$ 线性无关，则存在 $\alpha,\beta>0$，使对任给 $(\lambda_i)\in\mathbf{K}^n$，有

$$\alpha\sum|\lambda_i|\leqslant\left\|\sum\lambda_i x_i\right\|\leqslant\beta\sum|\lambda_i|.$$

54. $C_0(\mathbf{R})\triangleq\{u\in C(\mathbf{R}):\lim_{|x|\to\infty}u(x)=0\}$ 依 sup 范数是可分 Banach 空间.

55. $\mathrm{BV}(J)\triangleq\{u:\mathrm{V}_a^b(u)<\infty\}(J=[a,b])$ 依范数 $\|u\|=|u(a)|+\mathrm{V}_a^b(u)$ 是不可分 Banach 空间.

56. $\mathrm{AC}(J)\triangleq\{u:u$ 在 J 上绝对连续$\}(J=[a,b])$ 依范数

$$\|u\|=|u(a)|+\int_a^b|u'(x)|\mathrm{d}x$$

是可分 Banach 空间.

57. 设 $0<p\leqslant 1$，$\|u\|=|u(a)|+\sup\limits_{\substack{x\neq y\\x,y\in J}}\dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^p}$，则 $H^p\triangleq\{u:\|u\|<\infty\}$

($J=[a,b]$) 依范数 $\|u\|$ 是 Banach 空间.

58. l^∞ 与 $L^\infty(J)$ 是不可分的.

59. 设 $A\subset X$ 是子空间, $0<\beta<1$, $d(x,A)\leqslant\beta\|x\|$ ($\forall x\in X$), 则 $\bar{A}=X$.

60. 设 X 是赋范空间, 则 $X,\varnothing$ 是其中仅有的既开又闭的集.

61. X 完备 $\Leftrightarrow X$ 中任何全有界集皆为相对紧集.

62. 若 $A\subset X$ 是有限维真子空间, 则 $\exists x\in X$: $\|x\|=1$, $d(x,A)=1$.

63. 设 $A\subset X$ 是紧集, $f,f_n\in C(A)$, f_n 对 n 单调增且在 A 上处处收敛于 f, 则 $f_n\rightrightarrows f$.

64. $l^p(1\leqslant p<\infty)$ 中的有界集 A 相对紧 $\Leftrightarrow$ 对 $x=(x_i)\in A$ 一致地有 $\sum_n^\infty|x_i|^p\to 0(n\to\infty)$.

65. 设 $\{a_n: n\in\mathbf{N}\}$ 线性无关, $X=\mathrm{span}\{a_n\}$, 则 X 不是 Banach 空间.

66. 无限维 Banach 空间不能分解为可数个紧集之并.

67. 设 A,B 是 X 的闭子空间, $\dim A<\infty$, 则 $A+B$ 是 X 的闭子空间.

68. 设(X,d) 是度量空间, 给出 $\varphi:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ 的一组条件, 使 $\rho(x,y)=\varphi(d(x,y))$ 是 X 上与 d 等价的度量.

69. 设 X,Y 为度量空间, X 是紧的, $F:X\to Y$ 是连续双射, 则 F 是同胚.

70. 设 s 是数列之全体, $\|x\|=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{2^n}\frac{|x_n|}{1+|x_n|}$, 则 s 依度量 $d(x,y)=\|x-y\|$ 是完备度量空间.

71. 设 $\|u\|=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{2^n}\frac{\|u^{(n)}\|_0}{1+\|u^{(n)}\|_0}$, 则 $C^\infty(J)$ 依度量 $d(u,v)=\|u-v\|$ 是完备度量空间.

72. 设 $\|u\|=\sum_{n,k}\frac{1}{2^{n+k}}\frac{\sup_{|x|\leqslant n}|u^{(k)}(x)|}{1+\sup_{|x|\leqslant n}|u^{(k)}(x)|}$, 则 $C^\infty(\mathbf{R})$ 依度量 $d(u,v)=\|u-v\|$ 是完备度量空间.

73. 设 $A=\{u\in L^2[-1,1]: u \text{ 是偶函数}\}$, 求 $A^\perp$.

74. $\left\{\frac{1}{n!}e^{x/2}(x^ne^{-x})^{(n)}: n\geqslant 0\right\}$ 是 $L^2[0,\infty)$ 的标准正交基.

题 75 ~ 80 中 X 是 Hilbert 空间.

75. 设 A,B 是 X 的闭子空间, $A\perp B$, 则 $A+B$ 是 X 的闭子空间.

76. 设 A,B 是 X 的闭子空间, $0<\varepsilon<1$, $|\langle a,b\rangle|\leqslant\varepsilon\|a\|\|b\|$ ($\forall a\in A,\forall b\in B$), 则 $A+B$ 是 X 的闭子空间.

77. 若 X 可分, 则 X 中任何标准正交系是可数集.

78. 设$\{e_n\}$ 与$\{\varepsilon_n\}$ 分别为 X 中的标准正交基与标准正交系, $\sum_i|\langle e_n,\varepsilon_i\rangle|^2=1(n=1,2,\cdots)$, 则$\{\varepsilon_n\}$ 是标准正交基.

79. 设$\{e_n\}$ 与$\{\varepsilon_n\}$ 分别为 X 中的标准正交基与标准正交系, $\sum\|e_n-\varepsilon_n\|^2<1$, 则$\{\varepsilon_n\}$ 亦为标准正交基.

80. 设 $e_i\in X$, $\|e_i\|=1(i\in\mathbf{N})$, $\beta^2=\sum_{i\neq j}|\langle e_i,e_j\rangle^2|<\infty$, $x=(\lambda_i)\in l^2$. 则

$$(1-\beta)\|x\|_2^2\leqslant\left\|\sum\lambda_ie_i\right\|^2\leqslant(1+\beta)\|x\|_2^2.$$

第二章　线性算子与线性泛函

Banach 空间上的线性算子理论,构成泛函分析的核心内容,也是泛函分析应用于各个领域的主要工具.从逻辑上说,线性算子理论无疑是有限维空间中线性变换理论的自然延伸,因而不可避免地沿用某些线性代数的思路与术语,以至在某种意义上可将线性算子理论看作"无限维空间上的线性代数学".我们将会看到,这一比拟十分有用,但亦很受局限.关键在于,在无限维空间中,连续性是一本质因素,由此引出一个复杂得多的理论.

本章中涉及的 X,Y,Z 等总假定为赋范空间,在同一问题中用到同一数域 $\mathbf{K}$,大部分结果同时适用于 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{C}$ 两种情况.一部分结果依赖于空间的完备性,只要碰到这种情况,总会明确指出并加以强调.

§2.1　有界线性算子

首先概述纯代数意义上的线性算子概念,所述内容读者想必已从线性代数有所了解.

若一个映射 $T: X\to Y$ 满足

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty\quad(\alpha,\beta\in\mathbf{K},x,y\in X),\tag{1}$$

则称 T 为从 X 到 Y 的**线性算子**[①].恒等式(1)意味着 T 保持线性运算,它可推广为更一般的

$$T\Big(\sum_i\alpha_i x_i\Big)=\sum_i\alpha_i Tx_i\quad(\alpha_i\in\mathbf{K},x_i\in X,1\leqslant i\leqslant n).\tag{2}$$

正是恒等式(2)决定了线性算子具有一系列良好的代数性质,今将其主要者概述于下(证明是简单的,详见有关线性代数书籍).

2.1.1 命题　设 $T: X\to Y$ 是一线性算子,则以下结论成立:

(i) 任给子空间 $A\subset X$ 与子空间 $B\subset Y$,TA 与 $T^{-1}B$ 分别为 Y 与 X 的子空间;特别,值域 $R(T)=TX$ 与**零空间**(或核)$N(T)=T^{-1}(0)$ 分别为 Y 与 X 的子空间.

(ii) 若向量组 $\{x_i\}\subset X$ 线性相关,则 $\{Tx_i\}$ 亦线性相关;若 $A\subset X$ 是子空间且 $\dim A<\infty$,则 $\dim TA\leqslant\dim A$.

(iii) T 是单射 $\Leftrightarrow N(T)=\{0\}$.

---

① 亦称线性映射、线性变换、线性函数等;当 $Y=\mathbf{K}$ 时则称为线性泛函.

以上结论完全不涉及空间 X,Y 的赋范结构. 而下述定义则引进了本质上新的因素.

2.1.2 定义 设 $T:X\to Y$ 是一个线性算子. 令

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\text{①}. \tag{3}$$

若 $\|T\|<\infty$,则称 T 为从 X 到 Y 的**有界线性算子**,称 $\|T\|$ 为 T 的**算子范数**,简称为范数. 若 $\|T\|=\infty$,则称 T 为**无界算子**.

直接从定义推出,线性算子 $T:X\to Y$ 有界可等价地刻画为:

(i) $\exists k>0,\forall x\in X:\|Tx\|\leqslant k\|x\|$;或

(ii) T 将 X 中的有界集映为 Y 中的有界集. "有界算子"一词,即由此而来.

本书以 $L(X,Y)$ 记从 X 到 Y 的有界线性算子之全体,$L(X,X)$ 就简写作 $L(X)$.

对于 $T\in L(X,Y)$,算子范数 $\|T\|$ 是一个最重要的数量指标. 它的直观意义是什么呢?为看得更清楚些,我们给出公式(3) 的几个等价形式:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1}\|Tx\| \tag{4}$$

$$= \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\| \tag{5}$$

$$= \inf\{k\geqslant 0:\|Tx\|\leqslant k\|x\|(\forall x\in X)\}. \tag{6}$$

为验证(4) ~ (6),首先指出,直接由(3) 有

$$\boxed{\|Tx\|\leqslant\|T\|\,\|x\|\quad(\forall x\in X)} \tag{7}$$

由此易推出

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1}\|Tx\|\leqslant\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|\leqslant\|T\|,$$

这得出等式(4)(5). 若以 ρ 记式(6) 之右端,则由(7) 推出 $\rho\leqslant\|T\|$. 另一方面,由

$$\|Tx\|\leqslant k\|x\|\quad(\forall x\in X) \tag{8}$$

显然推出 $\|T\|\leqslant k$,因此 $\|T\|\leqslant\rho$. 故得 $\|T\|=\rho$,即等式(6) 成立.

注意(6) 中的 inf 实际上是 min.

现在利用算子范数公式(3) ~ (6) 从不同角度阐明 $\|T\|$ 的意义. 因 $\|Tx\|/\|x\|$ 是 Tx 与 x 两者的"长度"之比,故式(3) 表明 $\|T\|$ 是变换 T 的"最大伸张系数"②. 其次,闭单位球 $\bar{B}_1(0)$ 的象 $TB_1(0)$ 包含于某个以 0 为心的最小闭球,而式(5) 表明此闭球的半径正是 $\|T\|$;式(4) 则表明 $TS_1(0)$ 已"触到"

---

① 当同时涉及多个赋范空间时,只要不致混淆,就用同一记号 $\|\cdot\|$ 表示各空间中的范数. 若要强调 X 中范数的特殊性,就用记号 $\|x\|_X$ 或其他特设记号.

② 这只是一种启发性的说法,"最大"一词并不意味着式(3) 中的上确界一定达到.

球面 $S_{\|T\|}(0)$. 最后,注意形如(8)的不等式给出了对 $\|Tx\|$ 估计;其中 k 愈小,所得的估计就愈精确. 于是等式(6) 表明,不等式(7) 给出对 $\|Tx\|$ 的某种**最佳估计**. 对于有界线性算子理论的应用,关于 $\|T\|$ 的最后这个解释或许是最有意义的,而(7) 则是泛函分析中用得最频繁的不等式之一.

2.1.3 例　设 $J=[a,b](a<b)$. 定义

$$(Tu)(x)=\int_a^x u(t)\mathrm{d}t,\quad x\in J,u\in C(J). \tag{9}$$

显然 T 是从空间 $C(J)$ 到自身的线性算子. 今求出 $\|T\|$,下面所用的方法有一定普遍性,读者应细加体会. 依前面对 $\|T\|$ 的解释,我们要求得 $\|Tu\|_0$ 的一个"最佳估计". 首先作一初步估计:

$$\begin{aligned}\|Tu\|_0&=\sup_{x\in J}\left|\int_a^x u(t)\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\int_a^b|Bu(t)|\mathrm{d}t\leqslant(b-a)\|u\|_0\quad(\forall u\in C(J)),\end{aligned}$$

由此得 $\|T\|\leqslant b-a$. 为验证上述估计实际上是"最佳的",我们选择特殊的 $u\in C(J)$ 检验,通常要求 $\|u\|_0=1$,具体选定依赖于直接观察(这往往是困难之所在!). 此处倒很简单:取 $u(x)\equiv 1$,则

$$\|u\|_0=1,\quad (Tu)(x)=x-a\quad(x\in J).$$

于是

$$b-a=\|Tu\|_0\leqslant\|T\|\|u\|_0=\|T\|,$$

因而 $\|T\|=b-a$. 这表明估计式 $\|Tu\|_0\leqslant(b-a)\|u\|_0$ 已不能再改进.

2.1.4 命题　设 $T:X\to Y$ 是一个线性算子,则 T 有界 $\Leftrightarrow T$ 连续.

证　若 T 有界,则当在 X 中 $x_n\to x(n\to\infty)$ 时,

$$\begin{aligned}\|Tx_n-Tx\|&=\|T(x_n-x)\|\\&\leqslant\|T\|\|x_n-x\|\to 0(n\to\infty),\end{aligned}$$

可见 T 连续. 反之,若 T 无界,则必存在 $\{x_n\}\subset X$,使得 $\|x_n\|=1$, $\|Tx_n\|\geqslant n(n=1,2,\cdots)$;这推出

$$\|n^{-1}x_n\|\to 0,\quad 而\quad 1\leqslant\|T(n^{-1}x_n)\|\not\to 0,$$

因而 T 在点 0 处不连续. □

注意,在 2.1.4 中实际上证明了:T 有界 $\Leftrightarrow T$ 在 $x=0$ 处连续.

结合1.1.5与2.1.4,现在我们能够断言,一个线性同构 $T:X\to Y$ 是拓扑同构,正意味着 T 与 T^{-1} 皆连续(注意 §1.1(12) 表明 T 与 T^{-1} 皆有界).

读者可能心存疑问:线性代数中研究有限维空间上的线性算子时,何以不提及连续性?原来有以下结论.

2.1.5 定理　设 $T:X\to Y$ 是一线性算子,$\dim X<\infty$,则 T 必连续.

证 任取 X 的基$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$.由1.1.4(参照§1.9中1.1.6之证明),映射

$$\mathbf{K}^n \to X, \quad \lambda = (\lambda_i) \to \sum \lambda_i e_i$$

为拓扑同构,因此$|\lambda| \leqslant \text{const} \|x\|$,其中 $x = \sum \lambda_i e_i \in X$ 是任给的.于是

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \left\|\sum \lambda_i Te_i\right\| \leqslant \sum |\lambda_i| \, \|Te_i\| \\ &\leqslant |\lambda| \left(\sum \|Te_i\|^2\right)^{1/2} \quad (\text{用 Cauchy 不等式}) \\ &\leqslant \text{const} \|x\|,\end{aligned}$$

可见 T 连续. □

正是有限维空间上线性算子的特殊性质给我们造成了一种印象,似乎"线性性"与"连续性"应自然地联系在一起.在无限维空间中却并非如此.尽管大量应用上常见的线性算子确是连续的,但亦有不少常用且似乎很"简单"的线性算子是不连续的,因而很难将不连续线性算子视为"病态".实际上,在无限维空间中,无界算子的出现几乎有某种普遍性(参考题62).举出个别例子更是易如反掌.下面就是一个简单例子.

2.1.6 例 设 X 是只含有限个非零项的数列之全体,它作为 l^∞ 的子空间是一个赋范空间.任给 $x = (x_i) \in X$,定义

$$Tx = \left(\sum_i i x_i, 0, 0, \cdots\right),$$

则易见 $T: X \to X$ 是一线性算子.以 e_i 记第 i 项是1其余项为零的数列,则 $e_i \in X$, $\|e_i\|_\infty = 1$,而

$$\|Te_i\|_\infty = i \quad (i = 1,2,\cdots).$$

可见 T 是一个无界算子.

从应用上的需要考虑,并不能将无界算子排除在线性算子理论之外.不过,无界算子无疑具有更大的复杂性.在带入门性质的本书中,我们将主要考虑有界线性算子.

最后,我们得确证"算子范数"事实上是范数.

2.1.7 命题 $L(X,Y)$ 依算子范数是一个赋范空间;当 Y 完备时,$L(X,Y)$ 为 Banach 空间.

证 要证的有以下三点:

1° $L(X,Y)$ 中的线性运算定义为:

$$(\alpha T + \beta S)x = \alpha Tx + \beta Sx \tag{10}$$

(以上 $\alpha,\beta \in \mathbf{K}$, $T,S \in L(X,Y)$, $x \in X$),$L(X,Y)$ 依如上定义的线性运算是 $\mathbf{K}$ 上的向量空间.这是显然的.

2° 算子范数满足范数公理$(N_1)\sim(N_3)$(见1.1.1).$(N_1)(N_3)$是明显的,今

证(N_2). 任给 $T, S \in L(X,Y)$, $x \in X$, 结合(10)(7)有

$$\begin{aligned}\|(T+S)x\| &\leqslant \|Tx\| + \|Sx\| \\ &\leqslant \|T\|\|x\| + \|S\|\|x\| \\ &= (\|T\| + \|S\|)\|x\|,\end{aligned}$$

这推出 $\|T+S\| \leqslant \|T\| + \|S\|$.

3° 设 Y 完备, 证 $L(X,Y)$ 完备. 任取 Cauchy 列 $\{T_n\} \subset L(X,Y)$, 由

$$\lim_{m,n} \|T_m - T_n\| = 0 \tag{11}$$

推出, $\forall x \in X$, 有

$$\|T_m x - T_n x\| \leqslant \|T_m - T_n\| \|x\| \to 0 \quad (m, n \to \infty),$$

可见 $\{T_n x\}$ 是 Y 中的 Cauchy 列. 因 Y 完备, 故有 $Tx \in Y$, 使得

$$Tx = \lim_m T_n x \quad (\forall x \in X).$$

这就得到一个算子 $T: X \to Y$, 它显然是线性的. 由

$$\begin{aligned}\|T_n x - Tx\| &= \lim_m \|T_n x - T_m x\| \\ &\leqslant \overline{\lim_m} \|T_n - T_m\| \|x\|\end{aligned}$$

推出 $T_n - T \in L(X,Y)$, 从而 $T = T_n + (T - T_n) \in L(X,Y)$, 且

$$\|T_n - T\| \leqslant \overline{\lim_m} \|T_n - T_m\|;$$

$$\overline{\lim_n} \|T_n - T\| \leqslant \overline{\lim_n}\,\overline{\lim_m} \|T_n - T_m\| = 0 \quad (\text{用}(11)),$$

因此 $\|T_n - T\| \to 0 (n \to \infty)$, $L(X,Y)$ 的完备性得证. □

§2.2 矩阵·积分算子

本节系统地讨论若干有界线性算子的例子.

首先考虑有限维空间上的线性算子, 由此得到的某些启示对于研究无限维空间上的线性算子也是有益的. 设 X, Y 是有限维赋范空间, $\dim X = n$, $\dim Y = m$; $T \in L(X,Y)$. 分别取 X 的基 $\{e_j\}$ 与 Y 的基 $\{\varepsilon_i\}$. 设

$$Te_j = \sum_i a_{ij} \varepsilon_i, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

则 T 完全由矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbf{K}^{m \times n}$ 所确定. 若 $T, S \in L(X,Y)$ 分别对应矩阵 $A, B \in \mathbf{K}^{m \times n}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$, 则算子 $\alpha T + \beta S$ 恰对应矩阵 $\alpha A + \beta B$. 这样, 线性算子空间 $L(X,Y)$ 同构于矩阵空间 $\mathbf{K}^{m \times n}$, 因而对 $L(X,Y)$ 的研究可代之以对 $\mathbf{K}^{m \times n}$ 的研究. 这正是线性代数中熟知的观点.

任给 $A = (a_{ij}) \in \mathbf{K}^{m \times n}$, 依矩阵乘法自然确定一个线性算子

$$\mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m, \quad x \to Ax, \tag{1}$$

其中 x 当作 $n \times 1$ 矩阵. 不妨就以 A 记算子(1). 若令 $x = (x_j)$, $y = Ax = (y_i)$,

则(1)可表为

$$y_i = \sum_j a_{ij}x_j, \quad i = 1,2,\cdots,m. \tag{2}$$

$\mathbf{K}^n$ 依范数

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_j |x_j|^p\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty; \\ \max_j |x_j|, & p = \infty \end{cases} \tag{3}$$

是 Banach 空间,它可看作 l^p 的子空间,只需将 $x \in \mathbf{K}^n$ 等同于 l^p 中的元

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, \cdots).$$

下面称(3)为 **p 范数**,采用 p 范数的 $\mathbf{K}^n$ 也记作 l_n^p.相应地,算子 $A: l_n^p \to l_m^p$ 的范数记作 $\|A\|_p$,称为 A 的 p 范数.以下结果在矩阵理论中是熟知的.

2.2.1 命题 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbf{K}^{m\times n}$,则

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|; \tag{4}$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \|A^{\mathrm{T}}\|_1; \tag{5}$$

$$\|A\|_2 = \max_j \sqrt{\lambda_j}, \{\lambda_j\} = \sigma(A^{\mathrm{T}}A), \tag{6}$$

其中 $\sigma(A^{\mathrm{T}}A)$ 记矩阵 $A^{\mathrm{T}}A$ 的特征值之全体.

对于无限维空间上线性算子的研究,矩阵不再是一个普遍有效的工具.不过,我们仍可类比于有限维空间的情况,将某些"无穷矩阵"用于空间 l^p,得到类似于 2.2.1 的结果.

以 $A = (a_{ij})(i,j = 1,2,\cdots)$ 记一个无穷矩阵,其中 $a_{ij} \in \mathbf{K}$.仿照(1)(2),首先形式地定义一算子 $A: x \to Ax$:

$$\begin{cases} y = Ax, & x = (x_j), y = (y_i), \\ y_i = \sum_j a_{ij}x_j, & i = 1,2,\cdots. \end{cases} \tag{7}$$

现在的问题是,要使级数 $\sum_j a_{ij}x_j$ 收敛且 y 属于某个预定的空间,对于 A 与 x 都需作一定限制.不过有一点是明显的:算子 A 在其有定义的集合上是线性的.

下面的结果(不完全地)推广了 2.2.1.

2.2.2 命题 设算子 A 定义如(7).

(i) 若 $\beta \triangleq \sup_j \sum_i |a_{ij}| < \infty$,则 $A \in L(l^1)$ 且 $\|A\| = \beta$.

(ii) 若 $\beta \triangleq \sup_i \sum_j |a_{ij}| < \infty$,则 $A \in L(l^\infty)$ 且 $\|A\| = \beta$.

(iii) 若 $\beta \triangleq \left[\sum_i \left(\sum_j |a_{ij}|^q\right)^{p/q}\right]^{1/p} < \infty, 1 < p = \dfrac{q}{q-1} < \infty$,则 $A \in$

$L(l^p)$ 且 $\|A\| \leqslant \beta$.

证　(i) $\forall x=(x_j)\in l^1$,有

$$\sum_j |a_{ij}x_j| \leqslant \sup_j |a_{ij}| \, \|x\|_1 \leqslant \beta \|x\|_1 < \infty,$$

故 $\sum_j a_{ij}x_j$ 收敛.令 $y_i=\sum_j a_{ij}x_j$, $Ax=(y_i)$,则

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1 &= \sum_i |y_i| = \sum_i \Big|\sum_j a_{ij}x_j\Big| \\ &\leqslant \sum_j \sum_i |a_{ij}|\,|x_j| \\ &\leqslant \beta \sum_j |x_j| = \beta\|x\|_1.\end{aligned}$$

这表明 $A\in L(l^1)$ 且 $\|A\|\leqslant\beta$.

为证 $\|A\|=\beta$,只需证 $\|A\|\geqslant\beta$;为此,又只需对任给 $\alpha<\beta$ 证 $\|A\|>\alpha$(注意这是一般模式!).由 β 的定义,有下标 j_0 使 $\alpha<\sum_i \big|a_{ij_0}\big|$.设 $\{e_j\}$ 是 l^1 的标准基(1.3.8),则 $\|e_j\|_1=1$,

$$Ae_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\alpha &< \sum_i \big|a_{ij_0}\big| = \|Ae_{j_0}\|_1 \\ &\leqslant \|A\|\,\|e_{j_0}\|_1 = \|A\|.\end{aligned}$$

(ii) $\forall x=(x_j)\in l^\infty$,类似于(i)之证,有

$$\begin{aligned}\|Ax\|_\infty &= \sup_i \Big|\sum_j a_{ij}x_j\Big| \\ &\leqslant \sup_i \sum_j |a_{ij}|\,\|x\|_\infty = \beta\|x\|_\infty,\end{aligned}$$

由此可见 $A\in L(l^\infty)$, $\|A\|\leqslant\beta$.其次,$\forall\alpha<\beta$,取 i_0,使 $\alpha<\sum_j \big|a_{i_0j}\big|$.令 $x_j=\operatorname{sgn} a_{i_0j}$①, $x=(x_j)$.不妨设 $0\leqslant\alpha<\beta$,因而 $x\neq 0$,于是 $\|x\|_\infty=1$,

$$\begin{aligned}\alpha &< \sum_j \big|a_{i_0j}\big| = \sum_j a_{i_0j}x_j \\ &\leqslant \|Ax\|_\infty \leqslant \|A\|\,\|x\|_\infty = \|A\|.\end{aligned}$$

这推出 $\|A\|=\beta$.

(iii) 任给 $x=(x_j)\in l^p$,有

---

① 严格说来,记号 $\operatorname{sgn} x$ 只用于实数 x.但为简便起见,本书作以下约定:若 $0\neq x\in\mathbf{C}$,则令 $\operatorname{sgn} x=\bar{x}/|x|$;令 $\operatorname{sgn} 0=0$.因此总有 $x\operatorname{sgn} x=|x|$.

$$\|Ax\|_p^p = \sum_i \Big|\sum_j a_{ij}x_j\Big|^p$$
$$\leqslant \sum_i \Big(\sum_j |a_{ij}|^q\Big)^{p/q}\|x\|_p^p \quad (\text{用 } \S 1.2(9))$$
$$= (\beta\|x\|_p)^p,$$

这推出 $\|Ax\|_p \leqslant \beta\|x\|_p$. 因此 $A \in L(l^p)$ 且 $\|A\| \leqslant \beta$. □

仿照2.2.1,2.2.2中三种情况下的 $\|A\|$ 可分别记作 $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$ 与 $\|A\|_p$. 由2.2.2(iii)特别得到

$$\|A\|_2 \leqslant \Big(\sum_{i,j}|a_{ij}|^2\Big)^{1/2}, \tag{8}$$

只要(8)式右端有限. 注意,(8)可能为严格不等式(见题64).

正如空间 $l^p(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 自然地过渡到空间 L^p 一样,由式(7)定义的算子 A 亦有一自然的类似,即 L^p 空间上的积分算子. 不妨只考虑空间 $L^p(J)$,其中 $J=[a,b](a<b)$(一般空间 $L^p(\Omega,\mu)$ 的情况并无本质区别). 设 $K(x,y)$ 是矩形 $J\times J$ 上的可测函数[①],令

$$(Tu)(x) = \int_a^b K(x,y)u(y)\mathrm{d}y, \quad x \in J, \tag{9}$$

其中的积分是Lebesgue积分. 为使(9)中的积分对几乎所有 $x\in J$ 存在且函数 Tu 属于某个预定的空间,对于 K,u 自然需作一定限制. 与2.2.2对应的结果是:

2.2.3 命题 设算子 T 依式(9)定义.

(i) 令 $k(y)=\int_a^b|K(x,y)|\mathrm{d}x$. 若 $\beta\triangleq\|k\|_\infty<\infty$,则 $T\in L(L^1(J))$ 且 $\|T\|=\beta$.

(ii) 令 $k(x)=\int_a^b|K(x,y)|\mathrm{d}y$. 若 $\beta\triangleq\|k\|_\infty<\infty$,则 $T\in L(L^\infty(J))$ 且 $\|T\|=\beta$.

(iii) 若 $\beta\triangleq\left\{\int_a^b\left[\int_a^b|K(x,y)|^q\mathrm{d}y\right]^{p/q}\mathrm{d}x\right\}^{1/p}<\infty, 1<p=\dfrac{q}{q-1}<\infty$,则 $T\in L(L^p(J))$ 且 $\|T\|\leqslant\beta$. 特别,取 $p=q=2$ 得出:当 $K(\cdot,\cdot)\in L^2(J\times J)$ 时 $T\in L(L^2(J))$.

以上三种情况下的 $\|T\|$ 亦可分别记作 $\|T\|_1$, $\|T\|_\infty$ 与 $\|T\|_p$.

(9)中的函数 $K(x,y)$ 称为积分算子 T 的**核**,当它连续时,下面的命题断言(9)定义出一个 $C(J)$ 上的有界线性算子.

2.2.4 命题 设 $K(x,y)$ 在 $J\times J$ 上连续,则由式(9)定义出 $T\in L(C(J))$,

---

① K 对应(7)中的矩阵 $A=(a_{ij})$, A 无非是 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 上的函数 $(i,j)\to a_{ij}$.

且 $\| T \| = \sup_{x \in J} \int_a^b |K(x,y)| dy.$

证 令 $k(x) = \int_a^b |K(x,y)| dy$，则 $k \in C(J)$. $\forall u \in C(J)$，显然 $Tu \in C(J)$，因而 T 是 $C(J)$ 到自身的线性算子. 由

$$\begin{aligned} \| Tu \|_0 &= \sup_{x \in J} \left| \int_a^b K(x,y) u(y) dy \right| \\ &\leqslant \sup_{x \in J} \int_a^b |K(x,y)| \, |u(y)| dy \\ &\leqslant \sup_{x \in J} \int_a^b |K(x,y)| dy \| u \|_0 = \| k \|_0 \| u \|_0 \end{aligned}$$

得 $T \in L(C(J))$ 且 $\| T \| \leqslant \| k \|_0$.

取 $x_0 \in J$，使 $\| k \|_0 = k(x_0)$. 令 $\varphi(y) = \operatorname{sgn} K(x_0, y)$. 由 Lusin 定理([13, Th.2.4.4])，有 $\{u_n\} \subset C(J)$，使得 $u_n \to \varphi$, a.e.，且可设 $|u_n| \leqslant 1$. 于是

$$\begin{aligned} \| k \|_0 &= \int_a^b K(x_0, y) \varphi(y) dy \\ &= \lim_n \int_a^b K(x_0, y) u_n(y) dy \quad (\text{用控制收敛定理}) \\ &= \lim_n (Tu_n)(x_0) \leqslant \overline{\lim_n} \| Tu_n \|_0 \\ &\leqslant \overline{\lim_n} \| T \| \, \| u_n \|_0 \leqslant \| T \|. \end{aligned}$$

这就得出 $\| T \| = \| k \|_0$，如所要证. □

§2.3 基本定理

标题已经指明了本节所给定理的重要性. 这些定理都依赖于 Baire 纲定理(1.6.2)，因而都需要空间的完备性假设，且亦如 Baire 定理本身一样，这些定理的结论从直观上看来远不是一目了然的，因而具有异乎寻常的深刻性.

2.3.1 开映射定理 设 X, Y 是 Banach 空间，$T \in L(X, Y)$ 是满射，则它必为**开映射**，这意味着 T 将 X 中的开集映为 Y 中的开集.

定理的证明不很简单，我们将它放在本章最后一节.

在一般情况下，开映射与连续映射之间并无必然联系. 不过，由1.4.3 易见，一个双射连续的充要条件是其逆映射为开映射. 这一事实与 2.3.1 结合起来推出：

2.3.2 逆算子定理 设 X, Y 是 Banach 空间，$T \in L(X, Y)$ 是双射，则 T^{-1} 连续. 换言之，连续的线性同构必为拓扑同构(参考定义1.1.5).

证 由 2.3.1，T 是开映射，于是对任给开集 $V \subset X$，

$$(T^{-1})^{-1}V = TV$$

是 Y 中的开集. 于是由 1.4.3 知 $T^{-1}: Y \to X$ 连续. □

2.3.2的意义在于:为了判定一个线性同构 $T: X \to Y$ 为拓扑同构,只需验证"单方连续"(即 T 与 T^{-1} 之一连续)就够了. 当然应记住,能这样做的前提是 X 与 Y 皆为 Banach 空间. 下面就是一个应用 2.3.2 的例子.

2.3.3 命题 设 X, Y 是 Banach 空间, $T \in L(X, Y)$, $N(T) = \{0\}$, 则 $T: X \to R(T)$ 是拓扑同构的充要条件是 $R(T)$ 在 Y 中为闭集.

证 $N(T) = \{0\}$ 推出 T 为单射,因而 $T: X \to R(T)$ 是线性同构. 若 $T^{-1}: R(T) \to X$ 有界,则有 $k > 0$,使得

$$\| x \| = \| T^{-1}Tx \| \leqslant k \| Tx \| \quad (\forall x \in X). \tag{1}$$

设 $Tx_n \to y \in Y(n \to \infty)$,则由(1)有

$$\| x_m - x_n \| \leqslant k \| Tx_m - Tx_n \| \to 0 \quad (m, n \to \infty),$$

即 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列. 设 $x_n \to x(n \to \infty)$, 则 $Tx_n \to Tx = y$, 可见 $y \in R(T)$. 这证得 $R(T)$ 为闭集.

反之,若 $R(T)$ 是闭集,则它作为 Y 的闭子空间是Banach空间(1.1.4),于是由 2.3.2 推出 $T: X \to R(T)$ 为拓扑同构. □

以2.1.3 中的算子 T 为例作说明. 已知 $T \in L(C(J))$. 若 $(Tu)(x) = \int_a^x u(t)\mathrm{d}t \equiv 0$,则必 $u(x) \equiv 0$,因此 $N(T) = \{0\}$. 因

$$R(T) = C_0^1(J) \triangleq \{u \in C^1(J): u(a) = 0\}$$

在 $C(J)$ 中不是闭的(参考第一章题 13),故算子

$$T: C(J) \to C_0^1(J)$$

不是拓扑同构,这意味着微分算子

$$C_0^1(J) \to C(J), \quad u \to u'$$

是无界算子,其中 $C_0^1(J)$ 看作 $C(J)$ 的子空间.

在给出逆算子定理的一个重要推论之前,引进以下概念. 如所熟知,积集 $X \times Y$ 由所有点 $(x,y)(x \in X, y \in Y)$ 组成;它依运算

$$\alpha(x,y) + \beta(x',y') = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y')$$

$(\alpha, \beta \in \mathbf{K}, x, x' \in X, y, y' \in Y)$ 是一个向量空间,称为**积空间**. 若令

$$\| (x,y) \| = \| x \| + \| y \|, (x,y) \in X \times Y, \tag{2}$$

则易直接验证 $\| (x,y) \|$ 是一个范数,因而 $X \times Y$ 成为一个赋范空间,称为 X 与 Y 的积赋范空间,仍简称为积空间. 直接看出,

$$\| (x_n, y_n) \| \to 0 \Leftrightarrow \| x_n \| \to 0 \quad 且 \quad \| y_n \| \to 0 (n \to \infty).$$

因此,在 $X \times Y$ 中 $(x_n, y_n) \to (x,y)$ 相当于在 X 中 $x_n \to x$ 且在 Y 中 $y_n \to y$. 换

言之,积空间中的收敛归结为**依坐标收敛**①. 这一事实对于积空间的结构是本质的.

2.3.4 闭图象定理 设 X, Y 是 Banach 空间, $T : X \to Y$ 是线性算子. 若 T 的图象

$$G = \{(x, Tx) : x \in X\}$$

是积空间 $X \times Y$ 中的闭集,则 T 连续.

当图形 G(见图2-1)是闭集时称 T 为**闭线性算子**. G 是闭集意味着,若 $(x_n, Tx_n) \to (x, y)(n \to \infty)$,则必$(x, y) \in G$,即 $y = Tx$. 因此,定理可重新表述为:若线性算子 $T : X \to Y$ 满足条件:

$$\left.\begin{matrix} x_n \to x \\ Tx_n \to y \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = Tx, \tag{3}$$

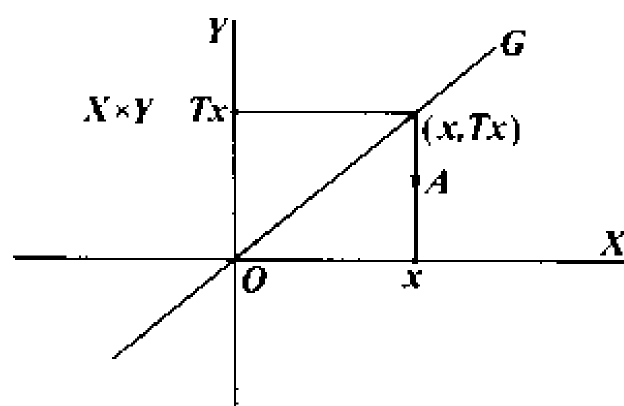


图2-1

则 T 必连续. 例如,设$\{u_n\} \subset C^1(J)$,则由熟知的数学分析定理有

$$\left.\begin{matrix} u_n \rightrightarrows u \\ u_n' \rightrightarrows v \end{matrix}\right\} \Rightarrow v = u'.$$

于是由 2.3.4 推出,微分算子

$$C^1(J) \to C(J), \quad u \to u'$$

连续,只是注意此处$C^1(J)$中采用范数 $\| u \|_1 = \| u \|_0 + \| u' \|_0$(参考1.2.3),依此范数$C^1(J)$并不是$C(J)$的子空间,因此此处结论并不与本节前面提到的"微分算子是无界算子"相矛盾.

2.3.4 之证 $X \times Y$作为两个完备空间的积空间必完备(读者在题17中证此

① 比拟于 $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$,称 x, y 为点$(x, y) \in X \times Y$ 的坐标. 一般地,若 $\| (x, y) \|$ 是 $X \times Y$ 上的任一范数,使得依此范数的收敛归结为依坐标收敛,则称该范数为积范数. 因此(2)定义一个积范数; $\| (x, y) \| = \max\{ \| x \|, \| y \| \}$ 也是积范数. 显然, $X \times Y$上的任何积范数互相等价,积范数的具体选定并无本质意义.

结论!).显然 G 是 $X\times Y$ 的子空间.因此,G 作为 $X\times Y$ 的闭子空间本身亦为 Banach 空间.定义算子(见图 2 - 1)

$$A: G\to X,(x,Tx)\to x,$$

则直接看出 A 是一个线性同构.因

$$(x_n,Tx_n)\to(x,Tx)\Rightarrow x_n\to x(n\to\infty),$$

故 A 连续.由逆算子定理,A^{-1} 亦应连续,这意味着

$$x_n\to x\Rightarrow(x_n,Tx_n)\to(x,Tx)(n\to\infty),$$

于是 $x_n\to x\Rightarrow Tx_n\to Tx(n\to\infty)$,这正表示 T 连续. □

现在考虑本节的最后一个基本定理,它或许是最常用的.

2.3.5 一致有界原理(Banach,Steinhaus,1927) 设 $\{T_i: i\in I\}\subset L(X,Y)$,

$$A=\{x\in X:\sup_i\|T_ix\|<\infty\}.\tag{4}$$

(i) 若 A 是 X 中的第二纲集,则 $\sup_i\|T_i\|<\infty$.

(ii) 若 $\sup\|T_i\|=\infty$,则 A 是第一纲集.

注.定理无需假定 X,Y 完备.但若已知 X 完备,则(i)中条件"A 是第二纲集"可换成条件"$A=X$",即

$$\sup_i\|T_ix\|<\infty\quad(\forall x\in X);\tag{5}$$

而由 Baire 定理(1.6.2),(ii)的结论可加强为:A^c 是 X 中的第二纲集与稠集,这可说成是,对几乎所有 $x\in X$,成立

$$\sup_i\|T_ix\|=\infty.\tag{6}$$

满足条件(6)的点 x 称为"共鸣点",而 2.3.5 因此有**共鸣定理**之称.

证 显然只需证(i).令

$$A_n=\{x\in X:\sup_i\|T_ix\|\leqslant n\},\quad n=1,2,\cdots.$$

注意 $\|T_ix\|\leqslant n$ 相当于 $x\in T_i^{-1}\bar{B}_n(0)$,由此知

$$A_n=\bigcap_i T_i^{-1}\bar{B}_n(0),\quad T_iA_n\subset\bar{B}_n(0),\tag{7}$$

因此 A_n 是闭集(用 1.4.3 与 1.3.5).显然 $A=\bigcup_1^\infty A_n$.因 A 不是第一纲集,必有某个 A_n 含内点,固定此 A_n,并设 $B_r(a)\subset A_n$,$r>0$.于是

$$\begin{aligned}T_i\bar{B}_1(0)&=T_i\left(\frac{1}{r}[\bar{B}_r(a)-a]\right)\\&=\frac{1}{r}[T_i\bar{B}_r(a)-T_ia]\\&\subset\frac{1}{r}(T_iA_n-T_ia)\\&\subset\frac{1}{r}[\bar{B}_n(0)+B_n(0)]\qquad(\text{用}(7))\end{aligned}$$

$$\subset \frac{1}{r}\overline{B}_{2n}(0) = \overline{B}_{2n/r}(0) \quad (\forall i \in I),$$

这表明 $\| T_i \| \leqslant 2n/r (\forall i \in I)$，因此$\sup\limits_i \| T_i \| \leqslant 2n/r < \infty$. □

值得说明的是，在 2.3.5 的证明中，我们有意使用集的演算程序，这种方法极为简洁，在泛函分析中广为应用，读者应细加体会. 有别于集论意义下的集运算(如并与交等)，此处用到“集的代数运算”，即“和”与“积”：

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}; \tag{8}$$

$$\Lambda B = \{\lambda b : \lambda \in \Lambda, b \in B\}. \tag{9}$$

取 $A = \{a\}$，$\Lambda = \{\lambda\}$ 得(8) 与(9) 特款：

$$a + B = \{a + b : b \in B\};$$

$$\lambda B = \{\lambda b : b \in B\}.$$

对上述运算可应用某些熟知的恒等式. 例如，若 $T : X \to Y$ 是线性算子，$A, B \subset X$，$\alpha \in \mathbf{K}$，则有

$$T(A + B) = TA + TB; \quad T(\alpha A) = \alpha TA.$$

但也要小心从事，例如不要误用 $A - A = 0$ 这样的式子！最值得注意的是球的运算，以下公式是常要用到的：

$$B_r(0) + B_s(0) \subset B_{r+s}(0);$$

$$kB_r(0) + a = B_{kr}(a), k > 0.$$

如同 1.6.2 一样，2.3.5 的应用亦可循两条途径. 其一是利用由 2.3.5 导出的某些标准结果，这可称为间接应用. 例如，从 2.3.5 显然推出：

2.3.6 推论　设 X 是Banach空间，$\Phi \subset L(X, Y)$，$\Phi(x) = \{Tx : T \in \Phi\}$，则

$$\sup_{T \in \Phi} \| T \| < \infty \Leftrightarrow \forall x \in X : \Phi(x) \text{ 在 } Y \text{ 中有界};$$

或者说，Φ 有界 $\Leftrightarrow$ 每个 $\Phi(x)(x \in X)$ 有界.

2.3.6 就是经常用来判定有界性的标准结果. 应用 2.3.5 的另一途径是直接应用. 其一般模式是：为判明某个性质 P 在 Banach 空间 X 中具有一般性，构造一个与之相关的算子序列$\{T_n\} \subset L(X, Y)$，使之满足$\sup\limits_n \| T_n \| = \infty$，且 $x \in X$ 满足 $P \Leftrightarrow \sup\limits_n \| T_n x \| = \infty$，所用的技巧随问题的具体特性而异. 下面是一个有趣的例子.

2.3.7 例　几乎每个连续函数的 Fourier 级数在一稠集上发散.

证　令 $J = [-\pi, \pi]$. 取定 $x \in J$，首先考虑 $u \in C(J)$ 的 Fourier 级数在点 x 的收敛性. 以 $S_n u$ 记 u 的 Fourier 级数的部分和，并令 $T_n u = (S_n u)(x)$. 在数学分析中已导出公式：

$$T_n u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-y)}{\sin\frac{x-y}{2}} u(y)\mathrm{d}y. \tag{10}$$

不难验证 $T_n \in L(C(J),\mathbf{K})$,且(一般结论见 2.4.6)

$$\begin{aligned}\|T_n\| &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-y)}{\sin\frac{x-y}{2}}\right|\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(2n+1)y|}{\sin y}\mathrm{d}y \qquad (\text{以 } y \text{ 代} \tfrac{x-y}{2})\\ &\geqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(2n+1)y|}{y}\mathrm{d}y \qquad (\text{用 } \sin y \leqslant y)\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi}\frac{|\sin y|}{y}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

因$\int_0^{\infty}\frac{|\sin y|}{y}\mathrm{d}y$ 发散,故$\sup_n\|T_n\| = \infty$. 于是由 2.3.5 推出,

$$A_x \triangleq \{u \in C(J) : \sup_n |S_n u(x)| < \infty\}$$

是 $C(J)$ 中的第一纲集. 以$\{r_n\}$ 记 J 上的有理点之全体,则

$$A = \bigcup_i A_{r_i}$$

是 $C(J)$ 中的第一纲集. 于是由 Baire 定理得出,A^c 是$C(J)$ 中的第二纲集且为稠集. 注意

$$A^c = \{u \in C(J) : \sup_n |S_n u(r_i)| = \infty(\forall i)\},$$

可见当 $u \in A^c$ 时u 的 Fourier 级数在 J 上任何有理点处发散. 这就得出:几乎所有 $u \in C(J)$ 的 Fourier 级数在一稠集上发散. □

如果注意到,要构成一个具体的 $u \in C(J)$,使其 Fourier 级数在某一给定点发散,并非易事(第一个这样的例子由 Fejér 于1910年给出),而在理论上我们却敢断言:这种函数不仅存在,而且极多,那么所得结论之深刻就更令人惊异了.

§2.4 对偶空间

给定 $\mathbf{K}$ 上的赋范空间 X,约定 $X^* = L(X,\mathbf{K})$. 由 2.1.7,X^* 是 $\mathbf{K}$ 上的 Banach 空间,称为 X 的**对偶空间**;称每个 $u \in X^*$ 为 X 上的**有界线性泛函**.

对有界线性算子适用的结论,当然亦适用于有界线性泛函. 因此,前几节的结果经适当表述之后,就成为关于有界线性泛函的相应结论. 例如,对任给 $u \in X^*$,由 §2.1(3) ~ (6) 有

$$\begin{aligned}\|u\| &= \sup_{x\neq 0}\frac{|u(x)|}{\|x\|} \\ &= \sup_{\|x\|=1}|u(x)| \\ &= \sup_{\|x\|\leqslant 1}|u(x)| \\ &= \min\{k\geqslant 0: |u(x)|\leqslant k\|x\|(\forall x\in X)\}. \end{aligned}\tag{1}$$

再如,将 2.3.6 用到有界线性泛函得出:

2.4.1 命题 设 X 是 Banach 空间,$F\subset X^*$. 则 F 在 X^* 中有界 $\Leftrightarrow \forall x\in X$: $F(x)\triangleq\{u(x): u\in F\}$ 在 $\mathbf{K}$ 中有界.

其他结论对于有界线性泛函的推论可类似写出,不再一一列举.

在逻辑上,X^* 是一个完全确定的 Banach 空间,它的元素就是 X 上的有界线性泛函,似乎不存在"求出"X^* 的问题. 但若 X^* 缺乏某种直观形象,以至难以有效地思考与运用,那么我们实际上会把它当成一种未知的东西. 这就提出一个问题:如何将 X^* **具体**表示出来?以下引理对解答此问题给出了准确意义与一般方法.

2.4.2 引理 设 Y 是一个 $\mathbf{K}$ 上的 Banach 空间,泛函 $\varphi: X\times Y\to\mathbf{K}$ 满足以下条件:

(i) $\varphi(x,y)$ 是双线性的,即它分别对 x 与 y 是线性的;

(ii) $|\varphi(x,y)|\leqslant\|x\|\|y\|(\forall x\in X, y\in Y)$;

(iii) $\varphi(x,y)=0(\forall x\in X)\Rightarrow y=0$;

(iv) $\forall u\in X^*, \exists y\in Y$,使得 $\|y\|\leqslant\|u\|$,且

$$u(x)=\varphi(x,y)\quad(\forall x\in X).\tag{2}$$

令 $\varphi_y=\varphi(\cdot,y)$,则映射

$$T: Y\to X^*, y\to\varphi_y\tag{3}$$

是一等距同构. 若 φ 仅满足条件(i)(ii) 及

(v) $\|y\|\leqslant\sup_{\|x\|=1}|\varphi(x,y)|(=\|\varphi_y\|)$,

则 T 是一等距嵌入(参考 1.1.5).

证 条件(i)(ii) 推出 $\varphi_y\in X^*$ 且 $\|\varphi_y\|\leqslant\|y\|$,于是映射(3) 有意义. φ 对 y 是线性的推出 T 为线性算子;由 $\|\varphi_y\|\leqslant\|y\|$ 得 $\|Ty\|\leqslant\|y\|$. 由条件(v) 有

$$\|y\|\leqslant\sup_{\|x\|\leqslant 1}|\varphi_y(x)|=\|\varphi_y\|=\|Ty\|,$$

因此 $\|Ty\|=\|y\|$. 这又推出 $N(T)=\{0\}$. 于是 $T: Y\to R(T)$ 是一个等距同构,从而 $T: Y\to X^*$ 是一等距嵌入. 若条件(iii)(iv) 满足,则 T 既是单射又是满射,且 $\|y\|\leqslant\|\varphi_y\|\leqslant\|y\|(\forall y\in Y)$,因此 $T: Y\to X^*$ 是等距同构. □

当 2.4.2 的条件满足时，Y 称为 X^* 的一个**实现**，它可与 X^* 视为等同，不妨直接写作 $X^* = Y$；公式(2) 则给出 X 上有界线性泛函的**通式**，其中的 $y \in Y$ 由 u 唯一决定，在同构对应的意义下可将 y 与 u 视为等同. 若仅有条件(i)(ii)(v) 满足，则不妨认为 $Y \subset X^*$，而式(2) 则给出 X 上一部分有界线性泛函的表达式. 通常，Y 是已经被充分研究因而相当熟悉的空间，而泛函 $\varphi(x, y)$ 具有明确的结构或熟悉的表达式，这样，通过同构对应(3)，本来很**抽象**的空间 X^* 就获得了一种**具体**的表示. 这正是 2.4.2 所给方法的诱人之处.

成功地应用 2.4.2 的关键在于恰当地选择 Y 与 φ，这基于由经验资料所提示的猜测. 下面考虑一些典型例子，它们给出一些常用空间的对偶空间的具体表示，因此通常称为表示**定理**.

2.4.3 定理　$X^* \cong X$，此处 X 为**实** Hilbert 空间，而 $\cong$ 表等距同构(本节中保持记号 $\cong$ 的这一用法).

证　令 $\varphi(x, y) = \langle x, y\rangle (x, y \in X)$. 直接由内积的性质及 Schwarz 不等式 (1.7.2) 得出，φ 满足 2.4.2 中条件(i) ~ (iii). 余下只需验证条件(iv). 取定 $u \in X^*$. 若 $u = 0$，则显然 $u(x) \equiv \langle x, 0\rangle (\forall x \in X)$. 下面设 $u \neq 0$，于是 $A \triangleq N(u) = \{x \in X : u(x) = 0\}$ 是 X 的真闭子空间(1.4.3). 由正交分解定理(1.7.7)，有 $X = A \oplus A^{\perp}$. 取 $x_0 \in A^{\perp}$，使 $u(x_0) \neq 0$(此种 x_0 必存在. 何故?)，不妨设 $u(x_0) = 1$. 令 $y = \|x_0\|^{-2} x_0$，则 $y \in A^{\perp}$. 直接验知 $x - u(x) x_0 \in A$，于是

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \langle x - u(x) x_0, y\rangle + \langle u(x) x_0, y\rangle \\ &= \langle u(x) x_0, y\rangle = u(x) \quad (\forall x \in X).\end{aligned}$$

在所得等式中取 $x = y$ 得 $\|y\|^2 \leqslant \|u\| \|y\|$，于是 $\|y\| \leqslant \|u\|$，可见 2.4.2 之条件(iv) 满足. 因此 $X^* \cong X$ 得证. □

由此可见，实 Hilbert 空间 X 中的有界线性泛函有通式：

$$u(x) = \langle x, y\rangle \quad (\forall x \in X), \tag{4}$$

其中 $y \in X$ 由 u 唯一决定，且 $\|y\| = \|u\|$. 式(4) 称为 **Riesz 表示**，它是 Hilbert 空间理论中最有价值的结果之一. 若 X 是**复** Hilbert 空间，则 Riesz 表示仍然适用，不同的只是，映射

$$X \to X^*, \quad y \to \langle \cdot, y\rangle$$

是一等距的**共轭线性同构**. 以上结论也称为 **Riesz 表示定理**.

结合 2.4.2 与 2.4.3 得到一个启示：2.4.2 中条件(ii) 颇类似于 Schwarz 不等式. 注意到 Hölder 不等式(见 §1.2(4)(9)) 是 Schwarz 不等式的某种推广，我们猜想 l^p 与 l^q 互相对偶，其中 $p^{-1} + q^{-1} = 1$. 下面就来证实这一点.

2.4.4 定理　$(l^p)^* \cong l^q, 1 \leqslant p = \dfrac{q}{q-1} < \infty$，且 $u \in (l^p)^*$ 有通式：

$$u(x)=\sum_i x_i y_i,\quad x=(x_i)\in l^p,\tag{5}$$

$y=(y_i)\in l^q$ 由 $u\in(l^p)^*$ 唯一决定，且 $\|y\|_q=\|u\|$.

证　定义 $\varphi: l^p\times l^q\to \mathbf{K}$ 如下：

$$\varphi(x,y)=\sum_i x_i y_i,\quad x=(x_i)\in l^p, y=(y_i)\in l^q.$$

直接看出 φ 满足2.4.2中条件(i)～(iii). 取定 $u\in(l^p)^*$. 设 $\{e_i\}$ 是 l^p 的标准基，令 $y_i=u(e_i)$, $y=(y_i)$. $\forall x=(x_i)\in l^p$, 有

$$\begin{aligned}u(x)&=u\Big(\lim_n\sum_{i=1}^n x_ie_i\Big)\\&=\lim_n u\Big(\sum_{i=1}^n x_ie_i\Big)\\&=\lim_n\sum_{i=1}^n x_iu(e_i)=\sum_{i=1}^\infty x_iy_i.\end{aligned}$$

若 $p=1$, 则 $q=\infty$,

$$\|y\|_\infty=\sup_i|y_i|=\sup_i|u(e_i)|\leqslant\|u\|,$$

可见 $y\in l^\infty$. 若 $1<p<\infty$, 则 $1<q<\infty$, $\forall n\geqslant 1$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n|y_i|^q&=\sum_{i=1}^n|y_i|^{q-1}(\operatorname{sgn} y_i)y_i\ ^{①}\\&=\sum_{i=1}^n|y_i|^{q-1}(\operatorname{sgn} y_i)u(e_i)\\&=u\Big(\sum_{i=1}^n|y_i|^{q-1}(\operatorname{sgn} y_i)e_i\Big)\\&\leqslant\|u\|\Big\|\sum_{i=1}^n|y_i|^{q-1}(\operatorname{sgn} y_i)e_i\Big\|_p\\&=\|u\|\Big(\sum_{i=1}^n|y_i|^{p(q-1)}\Big)^{1/p}\\&=\|u\|\Big(\sum_{i=1}^n|y_i|^{q}\Big)^{1/p}\quad(p(q-1)=q),\end{aligned}$$

这推出

$$\Big(\sum_{i=1}^n|y_i|^q\Big)^{1/q}\leqslant\|u\|.$$

令 $n\to\infty$ 得 $\|y\|_q\leqslant\|u\|$, 从而 $y\in l^q$, 这表明 φ 满足2.4.2中条件(iv). 因此 $(l^p)^*\cong l^q$. □

① 参看 p.50 的脚注①.

至此,读者大概已能猜测到$(L^p)^* \cong L^q$,事情的确如此.

2.4.5 定理(Riesz,1909) $L^p(\Omega)^* \cong L^q(\Omega)$,其中$1 \leqslant p = \frac{q}{q-1} < \infty$,$(\Omega,\mu)$是$\sigma$有限测度空间(即有分解$\Omega = \bigcup A_n, \mu A_n < \infty, n = 1,2,\cdots$);$f \in L^p(\Omega)^*$有通式:

$$f(u) = \int_\Omega uv\mathrm{d}\mu, \quad u \in L^p(\Omega), \tag{6}$$

$v \in L^q(\Omega)$由f唯一决定,且$\| v \|_q = \| f \|$.

设$J = [a,b](a < b)$,今考虑$C(J)^*$.对任给$v \in L^1(J)$,由

$$f(u) = \int_a^b u(x)v(x)\mathrm{d}x \tag{7}$$

显然定义一个$f \in C(J)^*$,且$\| f \| \leqslant \| v \|_1$.鉴于$L^1(J)$中含有足够多的元素,因而由(7)定义的$f$有一定的一般性,似乎可以猜测$C(J)^*$就是$L^1(J)$.这一猜测实际上不完全正确,因我们仅能建立:

2.4.6 命题 $L^1(J)$可等距嵌入到$C(J)^*$中.

证 定义$\varphi: C(J) \times L^1(J) \to \mathbf{K}$如下:

$$\varphi(u,v) = \int_a^b u(x)v(x)\mathrm{d}x, u \in C(J), v \in L^1(J).$$

直接看出φ满足2.4.2中条件(i)(ii).取定$v \in L^1(J)$,令$\varphi_v = \varphi(\cdot,v)$,则$\varphi_v \in C(J)^*$,今证$\| v \|_1 \leqslant \| \varphi_v \|$.取$\{u_n\} \subset C(J)$,使$u_n \to \mathrm{sgn}\, v$,a.e.,可设$|u_n| \leqslant 1$,则

$$\begin{aligned} \| v \|_1 &= \int_a^b v \cdot \mathrm{sgn}\, v\mathrm{d}x \\ &= \lim_n \int_a^b u_n v\mathrm{d}x \qquad \text{(用控制收敛定理)} \\ &= \lim_n \varphi_v(u_n) \leqslant \overline{\lim_n} \| \varphi_v \| \| u_n \| \leqslant \| \varphi_v \|, \end{aligned}$$

这表明φ满足2.4.2中条件(v).于是命题结论由2.4.2推出. □

任给$x_0 \in J$,由

$$f(u) = u(x_0) \tag{8}$$

显然定义一个$f \in C(J)^*$,且$\| f \| = 1$.但这样的f却不在由(7)所表示的泛函之内.因此,为得到$C(J)^*$的完全的实现,还必须寻找一个比$L^1(J)$更大的空间并推广公式(7),为此需用到Stieltjes积分,这就是以下结果(证明在§2.10中),它也称为Riesz表示定理.

2.4.7 定理(Riesz,1909) $C(J)^* \cong \mathrm{BV}_0(J) \triangleq \{v \in \mathrm{BV}(J): v$在$J$上处处右连续且$v(a) = 0\}$,$J = [a,b](a < b)$,$\mathrm{BV}_0(J)$中使用范数$\| v \| = V_a^b(v)$;

$f \in C(J)^*$ 有通式

$$f(u) = \int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x) \quad (u \in C(J)),$$

其中积分为Riemann-Stieltjes积分，$v \in BV_0(J)$ 由 f 唯一决定且 $\|v\| = \|f\|$.

2.4.8 命题 $(X \times Y)^* \cong X^* \times Y^*$，其中 $X \times Y$ 与 $X^* \times Y^*$ 中分别采用范数

$$\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|, \quad (x,y) \in X \times Y; \tag{9}$$

$$\|(u,v)\| = \max\{\|u\|, \|v\|\}, \quad (u,v) \in X^* \times Y^*. \tag{10}$$

证 仍用2.4.2. 定义 $\varphi : (X \times Y) \times (X^* \times Y^*) \to \mathbf{K}$ 如下：

$$\varphi((x,y),(u,v)) = u(x) + v(y).$$

显然 φ 分别对 (x,y) 与 (u,v) 是线性的. 依式(9),(10)有

$$\begin{aligned}|u(x) + v(y)| &\leqslant \|u\|\|x\| + \|v\|\|y\| \\ &\leqslant \|(x,y)\|\|(u,v)\|,\end{aligned}$$

可见 φ 满足2.4.2中条件(ii). 其次，显然 φ 满足2.4.2中条件(iii).

任给 $T \in (X \times Y)^*$，令 $u(x) = T(x,0)$，$v(y) = T(0,y)$. 由

$$|u(x)| \leqslant \|T\|\|(x,0)\| = \|T\|\|x\| \quad (\forall x \in X)$$

可见 $u \in X^*$ 且 $\|u\| \leqslant \|T\|$；同理 $v \in Y^*$ 且 $\|v\| \leqslant \|T\|$，故

$$\|(u,v)\| \leqslant \|T\|.$$

其次，

$$T(x,y) = T(x,0) + T(0,y) = u(x) + v(y),$$

可见 φ 满足2.4.2之条件(iv). 于是命题结论由2.4.2推出. □

对偶空间的重要性在于，X 与 X^* 两者的性质之间存在着很强的联系，正是这种联系使得 X^* 成为研究空间 X 的重要工具. 这方面有很多深刻的结果本书都无法涉及，有兴趣的读者可参看较深入的Banach空间理论著作.

下面给出与对偶空间有关的几个有用记号，它们使许多表述明显简化，且特别富有启发性. 任给 $A \subset X$，$U \subset X^*$，令

$$A^\perp = \{u \in X^* : u(a) = 0 (\forall a \in A)\}; \tag{11}$$

$$^\perp U = \{x \in X : u(x) = 0 (\forall u \in U)\}, \tag{12}$$

二者分别称为 A 与 U 的**零化子**. 采用记号 $A^\perp$ 的理由是：若 X 是Hilbert空间，认定 $X = X^*$，则由(11)定义的 $A^\perp$ 正好就是 A 的正交补(1.7.4(iii)). 为了便于类比，有时采用记号

$$\langle u, x \rangle = u(x), u \in X^*, x \in X, \tag{13}$$

且当 $\langle u, x \rangle = 0$ 时说 u 与 x"正交"①. 记号(13)的好处是，其中 u 与 x 处于对等地

① 这就自然引出记号 $u \perp x$，确有一些著作使用这一记号.

位,在需要 u 与 x 互换角色的问题中有其方便.

下面将涉及零化子的初等结果汇集在一起(其证明是简单的,留给读者作为练习),以便引用.

2.4.9 命题 设 $\varnothing \neq A, B \subset X, \varnothing \neq U, V \subset X^*$,则以下结论成立:

(i) $A^{\perp}$ 与 $^{\perp}U$ 分别为 X^* 与 X 的闭子空间(不必假定 A, U 本身是子空间).

(ii) $A \subset B \Rightarrow A^{\perp} \supset B^{\perp}$; $U \subset V \Rightarrow {}^{\perp}U \supset {}^{\perp}V$.

(iii) $\overline{\mathrm{span}A}^{\perp} = A^{\perp}$; ${}^{\perp}\overline{\mathrm{span}U} = {}^{\perp}U$.

§2.5 Hahn-Banach 定理

在上节中,我们求得了若干赋范空间上的有界线性泛函的通式.不过,很难指望对一般的赋范空间获得象2.4.3～2.4.5这样精确的结果.然而,这并不是一件太令人悲观的事.对于某些问题来说,对 X^* 未必需要太多的信息.在很多情况下,我们仅需知道 X^* 是否具有以下**分离性质**:

$$(S)\ \forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists u \in X^*: u(x) \neq u(y).$$

倘(S)成立,则可通过有界线性泛函来识别 X 中的相异点,因而 X^* 足以作为研究空间 X 的工具.本节将指明,性质(S)正是下面建立的 Hahn-Banach 定理的推论.Hahn-Banach 定理与逆算子定理(2.3.2),一致有界原理(2.3.5)一起构成泛函分析的基石[①].

以下设 X 是给定的赋范空间.若 X 上的实泛函 $p(x)$ 满足条件:

(i) 正齐次性: $p(\alpha x) = \alpha p(x), \alpha > 0, x \in X$;

(ii) 次可加性: $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), x, y \in X$,

则称 $p(x)$ 为**次线性泛函**.显然范数是次线性泛函.

2.5.1 Hahn-Banach 定理[②] 设 X 是实向量空间,A 是 X 的子空间,u 是 A 上的线性泛函,p 是 X 上的次线性泛函,$u(x) \leqslant p(x)(\forall x \in A)$.则存在 X 上的线性泛函 v,使得 $v|A = u$ 且 $v(x) \leqslant p(x)(\forall x \in X)$.

定理的证明需要用到一定集论公理,将它放在 §2.10 中.现在我们更感兴趣的是2.5.1的推论及其应用.

2.5.2 延拓定理 设 A 是 X 的子空间,u 是 A 上的有界线性泛函,则 u 可延拓为 X 上的有界线性泛函 v,使得

$$\| v \| = \| u \|_A \triangleq \sup_{x \in A, \|x\| \leqslant 1} |u(x)|. \tag{1}$$

① 所谓"泛函分析三大定理"通常指此.

② 有时也将2.5.2称为Hahn-Banach定理.实际上,将包括2.5.1与2.5.2在内的一组互有联系的定理统称为Hahn-Banach定理,似乎更为恰当.

定理中的 v 通常称为 u 在 X 上的**保范延拓**.

证　首先设 X 是实赋范空间.令 $p(x)=\|u\|_A\|x\|$,则 $p(x)$ 是 X 上的次线性泛函,$u(x)\leqslant p(x)(\forall x\in A)$.由定理2.5.1,有 X 上的线性泛函 v,使得 $v\mid A=u$,且 $v(x)\leqslant p(x)(\forall x\in X)$.这结合

$$-v(x)=v(-x)\leqslant p(-x)=p(x)$$

得出

$$|v(x)|\leqslant p(x)=\|u\|_A\|x\|\quad(\forall x\in X),$$

这推出 $v\in X^*$ 且 $\|v\|\leqslant\|u\|_A$.另一方面显然 $\|v\|\geqslant\|u\|_A$,故(1)式成立.

其次设 X 是复赋范空间,则 $\mathrm{Re}u$ 是 A 上的实线性泛函,且

$$\mathrm{Re}u(x)\leqslant|u(x)|\leqslant\|u\|_A\|x\|=p(x).$$

将 X 视为实赋范空间应用2.5.1,可将 $\mathrm{Re}u$ 扩张为 X 上的实线性泛函 φ,使得 $\varphi(x)\leqslant p(x)(\forall x\in X)$.令

$$v(x)=\varphi(x)-\mathrm{i}\varphi(\mathrm{i}x),\quad x\in X,$$

则 $v(\mathrm{i}x)=\mathrm{i}v(x)$,因而易验证 v 是 X 上的复线性泛函.当 $x\in A$ 时有

$$\begin{aligned}v(x)&=\mathrm{Re}u(x)-\mathrm{i}\cdot\mathrm{Re}u(\mathrm{i}x)\\&=\mathrm{Re}u(x)+\mathrm{i}\cdot\mathrm{Im}u(x)=u(x).\end{aligned}$$

$\forall x\in X$,有 $\varepsilon\in\mathbf{C}$:

$$\begin{aligned}|v(x)|&=\varepsilon v(x)=v(\varepsilon x)=\varphi(\varepsilon x)\\&\leqslant p(\varepsilon x)=\|u\|_A\|x\|,\end{aligned}$$

由此如同第一段所证一样有 $v\in X^*$,$\|v\|=\|u\|_A$. □

2.5.3 存在定理　设 A 是 X 的闭子空间,$x_0\in X\setminus A$,则存在 $v\in A^{\perp}$,使得 $\|v\|=1$,$v(x_0)=\rho\triangleq d(x_0,A)$.特别取 $A=\{0\}$ 得出:当 $0\neq x_0\in X$ 时必存在 $v\in X^*$,使得 $\|v\|=1$ 且 $v(x_0)=\|x_0\|$.

证　令 $B=A+\mathbf{K}x_0$,则 B 是 X 的子空间;因显然 $A\cap\mathbf{K}x_0=\{0\}$,故 $A+\mathbf{K}x_0$ 是直和,即 $B=A\oplus\mathbf{K}x_0$.定义 B 上的泛函 u:

$$u(a+\lambda x_0)=\lambda\rho,\quad a\in A,\lambda\in\mathbf{K},$$

则 u 显然是 B 上的线性泛函,$u(a)=0(\forall a\in A)$,$u(x_0)=\rho$,

$$\begin{aligned}\|u\|_B&=\sup_{0\neq x\in B}\frac{|u(x)|}{\|x\|}\\&=\sup_{a\in A,0\neq\lambda\in\mathbf{K}}\frac{\lambda\rho}{\|a+\lambda x_0\|}\\&=\sup_{a\in A,0\neq\lambda\in\mathbf{K}}\frac{\rho}{\|\lambda^{-1}a+x_0\|}\\&=\rho\Big/\inf_{a\in A}\|x_0-a\|\end{aligned}$$

$$= \rho/d(x_0, A) = 1$$

(注意$x_0 \overline{\in} A$ 而A 为闭集推出$\rho > 0$). 这样, u 是B 上的有界线性泛函. 设 $v \in X^*$ 是 u 的保范延拓(2.5.2), 则

$$\| v \| = 1, v(x_0) = u(x_0) = \rho, v(a) = u(a) = 0 (\forall a \in A),$$

可见 $v \in A^{\perp}$. □

图 2 - 2 给出了 2.5.3 在 Hilbert 空间中的解释.

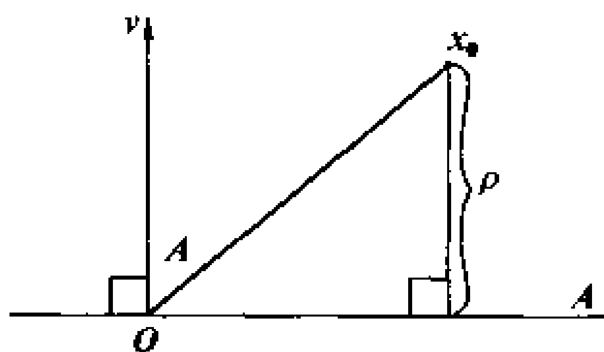


图 2 - 2

初看起来, 2.5.3 的结论与证明似乎皆无惊人之处, 但实际上它已为一套系统地使用的方法奠定了基础. 关键之点是, 它蕴涵了本节开头提出的分离性质, 这就是如下的

2.5.4 推论 $\forall x, y \in X, x \neq y \Leftrightarrow \exists u \in X^*: u(x) \neq u(y)$; 或等价地,

$$\boxed{x = y \Leftrightarrow \forall u \in X^*: u(x) = u(y)} \tag{2}$$

证 显然 $x = y \Rightarrow \forall u \in X^*: u(x) = u(y)$. 反之, 若 $x \neq y$, 则由定理 2.5.3 知存在 $u \in X^*$, 使

$$u(x - y) = \| x - y \| \neq 0,$$

从而 $u(x) \neq u(y)$. □

2.5.4 的价值在于, 它为证明赋范空间中的向量等式提供了一种普遍方法, 其形式至为简单: 若要证向量等式 $x = y$(这通常是一个无限维问题), 则只要证数量等式

$$u(x) = u(y) \quad (\forall u \in X^*),$$

后者往往是一个初等问题. 下面用一个简单例子来说明.

2.5.5 命题 设 $\sum x_n$ 是 Banach 空间 X 中的绝对收敛级数, $\{n_k : k \in \mathbf{N}\}$ 是 $\mathbf{N}$ 的任一排列, 则 $\sum\limits_n x_n = \sum\limits_k x_{n_k}$.

证 首先注意, 和 $\sum x_n$ 与 $\sum x_{n_k}$ 都是有意义的(参看第一章题 3), 因此这是证明向量等式的问题. $\forall u \in X^*$, 有

$$\sum_n |u(x_n)| \leqslant \sum_n \|u\| \|x_n\| < \infty,$$

可见 $\sum u(x_n)$ 是绝对收敛的数值级数. 由熟知的数学分析定理, 有

$$\sum_n u(x_n) = \sum_k u(x_{n_k}). \tag{3}$$

另一方面, 由 u 的线性性与连续性有 $u\left(\sum x_n\right) = \sum u(x_n)$. 于是从(3) 推出

$$u\left(\sum_n x_n\right) = u\left(\sum_k x_{n_k}\right) \quad (\forall u \in X^*).$$

应用 2.5.4, 立得等式 $\sum_n x_n = \sum_k x_{n_k}$. □

以上证法的诱人之处在于, 它避开了对结论的直接证明(从数学分析中的作法来看, 直接证明并不平凡), 而是借助于 2.5.4, 将已知的经典分析结论, 提升为赋范空间中的一个对应结论. 将以上证法加以引伸, 就得到在赋范空间中推广经典分析理论的一种一般方法. 这种方法应用如此普遍且高度标准化, 以至在很多情况下, 几乎是例行的标准程序完全可以省去, 只需提到"依据 Hahn-Banach 定理"就够了. 为加深读者的印象, 不妨再举一例.

设 $x(\cdot):[a,b]\to X$ 是一向量值函数. 完全照搬经典分析中的定义, 令

$$x'(t) = \lim_{\tau\to 0}\frac{x(t+\tau)-x(t)}{\tau}; \tag{4}$$

$$\int_a^b x(t)\mathrm{d}t = \lim_{\max\Delta t_i\to 0}\sum_{i=1}^n x(\tau_i)\Delta t_i, \tag{5}$$

其中 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, \tau_i \in [t_{i-1}, t_i], \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. 不难证明, 当 X 完备, $x(t)$ 连续时, (5) 中的积分存在. 任给 $u \in X^*$, 显然有

$$u(x'(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(x(t)); \tag{6}$$

$$u\left(\int_a^b x(t)\mathrm{d}t\right) = \int_a^b u(x(t))\mathrm{d}t, \tag{7}$$

只要等式左端有意义.

2.5.6 Newton-Leibniz 公式 设 X 是一个 Banach 空间, 函数 $x(\cdot):[a,b]\to X$ 有连续导数, 则成立

$$\int_a^b x'(t)\mathrm{d}t = x(b) - x(a). \tag{8}$$

证 这由经典的 Newton-Leibniz 公式及 2.5.4 推出, 推理的格式完全是标准的:

$$\begin{aligned} u\left(\int_a^b x'(t)\mathrm{d}t\right) &= \int_a^b u(x'(t))\mathrm{d}t \qquad (\text{用}(7)) \\ &= \int_a^b [u(x(t))]'\mathrm{d}t \qquad (\text{用}(6)) \end{aligned}$$

$$= u(x(b)) - u(x(a)) \quad (\text{用 Newton-Leibniz 公式})$$
$$= u(x(b) - x(a)),$$

于是由 2.5.4 知式(8) 为真. □

看了以上例子之后,读者可能会不胜惊讶:Banach 空间中的微积分学竟如此容易!如果只考虑如上的向量值函数 $x(t)$,可以说情况大体如此.然而你应记住:这多亏有 Hahn-Banach 定理之助!

现在考虑 2.5.3 的另一种类型的推论,仅举一典型例子用作说明.回忆在 1.7.5 中,我们实际上证明了:对于 $A = \{e_i\}$(依 1.7.5 的记号),有 $A^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow A$ 是基本集.现在在赋范空间中建立类似结果.

2.5.7 定理 设 $\varnothing \neq A \subset X$,则 $\overline{\operatorname{span} A} = {}^{\perp}(A^{\perp})$;$A$ 是 X 的基本集 $\Leftrightarrow A^{\perp} = \{0\}$(记号依 §2.4(11),(12)).

证 由 $\overline{\operatorname{span} A}^{\perp} = A^{\perp}$ (2.4.9) 推出 $\overline{\operatorname{span} A} \subset {}^{\perp}(A^{\perp})$.若 $x_0 \in X \setminus \overline{\operatorname{span} A}$,则由定理2.5.3 有 $v \in \overline{\operatorname{span} A}^{\perp} = A^{\perp}$,使 $v(x_0) \neq 0$.这表明 $x_0 \overline{\in} {}^{\perp}(A^{\perp})$,因此 $\overline{\operatorname{span} A} = {}^{\perp}(A^{\perp})$.

若 A 是 X 的基本集,则 $\overline{\operatorname{span} A} = X$(1.3.6),于是

$$A^{\perp} = \overline{\operatorname{span} A}^{\perp} = X^{\perp} = \{0\}.$$

反之,若 $A^{\perp} = \{0\}$,则

$$\overline{\operatorname{span} A} = {}^{\perp}(A^{\perp}) = {}^{\perp}\{0\} = X,$$

故 A 是基本集. □

利用 2.5.7 来判定基本集有时十分简便.例如设 $1 \leqslant p = \frac{q}{q-1} < \infty$, $A = \{\chi_{[a,x]} : x \in J\} \subset L^p(J)$, $J = [a,b]$.若 $v \in A^{\perp}$,则 $v \in L^q(J)$,

$$\int_a^x v(y)\mathrm{d}y = 0 \quad (\forall x \in J),$$

这推出 $v(x) = 0$,a.e..于是由 2.5.7 知 A 是 $L^p(J)$ 的基本集.

记 $X^{**} = (X^*)^*$,称它为 X 的**二次对偶**.

2.5.8 定理 X 可等距嵌入到 X^{**} 中.

证 依然用 2.4.2 提供的方法.定义

$$\varphi : X^* \times X \to \mathbf{K}, \quad (u, x) \to u(x),$$

则显然 φ 满足 2.4.2 中条件(i)(ii).令 $\varphi_x = \varphi(\cdot, x)$,则 $\varphi_x \in X^{**}$,今证 $\|x\| \leqslant \|\varphi_x\|$.可设 $x \neq 0$,因而由 2.5.3 有 $u \in X^*$,使

$$u(x) = \|x\|, \quad \|u\| = 1.$$

于是

$$\|x\| = \varphi_x(u) \leqslant \|\varphi_x\| \|u\| = \|\varphi_x\|,$$

可见 φ 满足 2.4.2 中条件(v).于是应用 2.4.2 得所要证. □

定理证明提供了一个嵌入映射:

$$X \to X^{**}, \quad x \to \varphi_x, \tag{9}$$

称为从 X 到 X^{**} 的**正则嵌入**.用 $\tilde{x}$ 表 φ_x 可能是一个更方便的记号.利用正则嵌入将 x 等同于 $\tilde{x}$,因而不妨认为 $X \subset X^{**}$.这种将向量 $x \in X$ 同时解释为 X^* 上的有界线性泛函的观点,凸显了 X 与 X^* 之间的对偶关系,特别富有启发性.例如,由范数公式 §2.4(1) 直接提示出向量范数公式:

$$\|x\| = \sup_{u \in X^*, \|u\| \leqslant 1} |u(x)|. \tag{10}$$

再如,关于有界性的命题 2.4.1 提示出以下对偶命题:

2.5.9 命题 设 $\varnothing \neq A \subset X$,则 A 有界 $\Leftrightarrow \forall u \in X^*: u(A)$ 在 $\mathbf{K}$ 中有界.

注意与 2.4.1 不同,2.5.9 并不要求 X 完备!

作为 X^* 的对偶空间,X^{**} 必然是完备的;因而,X 在 X^{**} 中的闭包 $\overline{X}$(它是 X^{**} 的闭子空间)亦是完备的,故是 X 的完备化(参看 1.1.5).这就顺便得到了 1.1.7 的一个极短的证明(唯一性部分除外).

若 $X \neq X^{**}$,则 X 不是 X^* 的对偶空间,因而不能说 X 与 X^* 互为对偶.这种不对称性是涉及 X 与 X^* 的命题(如 2.4.1 与 2.5.9)不完全对应的根源.仅当 $X = X^{**}$ 时,X 与 X^* 之间的对偶关系才达到很完美的程度.这样的 X 无疑会有更好的性质,因此作以下定义.

2.5.10 定义(Hahn,1927) 若映射(9)为等距同构,则称 X 为**自反空间**.

容易看出,有限维空间、Hilbert 空间、L^p 空间($1 < p < \infty$)都是自反空间.

* §2.6 分离定理

本节介绍 Hahn-Banach 定理的另一组推论,它们具有明显的几何特征,在涉及凸性的问题中有广泛应用.

设 X 是一实赋范空间.首先给出与凸性有关的一些概念.

2.6.1 定义 任给 $a, b \in X$,称点集

$$[a,b] \triangleq \{ta + (1-t)b : 0 \leqslant t \leqslant 1\} \tag{1}$$

为 X 中以 a, b 为端点的**线段**.若 $A \subset X$, $\forall a, b \in A$,有 $[a,b] \subset A$,则称 A 为**凸集**.

从定义直接看出,A 是凸集的充要条件是

$$tA + (1-t)A \subset A \quad (\forall t \in [0,1]). \tag{2}$$

常见的凸集有:

1° 子空间;子空间的平移象(即形如 $a + A$ 的集,A 是子空间).

2° 半空间:设 $0 \neq u \in X^*$, $\beta \in \mathbf{R}$,则形如 $X(u \geqslant \beta)$, $X(u \leqslant \beta)$, $X(u > \beta)$,

$X(u < \beta)$ 的集都称为半空间,$X(u = \beta)$ 称为超平面.

3° 开球与闭球.

以下命题汇集了关于凸集的一些简单性质,以备查用.

2.6.2 命题 (i) 任意个凸集的交是凸集.

(ii) 若 $A, B \subset X$ 是凸集,则 $A + B$ 是凸集.

(iii) 若 $A \subset X$ 是凸集,则 $\overline{A}$ 与 A° 是凸集.

(iv) 若 $T: X \to Y$ 是线性算子,$A \subset X$ 与 $B \subset Y$ 为凸集,则 TA 与 $T^{-1}B$ 是凸集;特别,$\alpha A (\alpha \in \mathbf{R})$ 是凸集.

(v) 若 $A \subset X$ 是凸集,$A^\circ \neq \varnothing$,则 $A \subset \overline{A^\circ}$.

(vi) 若 $A \subset X$ 是非空开凸集,$0 \neq u \in X^*$,则 $u(A)$ 是开区间.

证 (i) ~ (iv) 的证明是平凡的,请读者自己完成.

(v) 取定 $x_0 \in A^\circ$. $\forall x \in A$,令 $x_t = (1-t)x_0 + tx (0 < t < 1)$,则当 $t \to 1$ 时 $x_t \to x$.余下证 $x_t \in A^\circ$,这由以下推理得出:

$$\begin{aligned} x_t &\in (1-t)A^\circ + tA \\ &= \bigcup_{a \in A} [(1-t)A^\circ + ta] \\ &= \bigcup_{a \in A} [(1-t)A + ta]^\circ \subset A^\circ. \end{aligned}$$

(vi) $u(A)$ 必为凸集,而 $\mathbf{R}$ 中的凸集必是区间.分别以 α, β 记区间 $u(A)$ 的左端点与右端点.若 $\beta \in u(A)$,则有 $a \in A$ 使 $\beta = u(a)$.取 $x \in X$ 使 $u(x) \neq 0$,可设 $u(x) > 0$. $\forall \varepsilon > 0$,有

$$u(a + \varepsilon x) = \beta + \varepsilon u(x) > \beta.$$

但当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时 $a + \varepsilon x \in A$,得出矛盾.因此 $\beta \overline{\in} u(A)$;同理 $\alpha \overline{\in} u(A)$,故 $u(A) = (\alpha, \beta)$. □

设 $A, B \subset X, 0 \neq u \in X^*, r \in \mathbf{R}$.若

$$u(A) \leqslant r \leqslant u(B), \tag{3}$$

即 $u(a) \leqslant r \leqslant u(b) (\forall a \in A, \forall b \in B)$,则集 A, B 分别位于闭的半空间

$$X(u \leqslant r) \quad 与 \quad X(u \geqslant r)$$

中,此时说超平面 $X(u = r)$ **分离**集 A 与 B(图 2-3(a)).若

$$u(A) < r < u(B), \tag{4}$$

即 $u(a) < r < u(b) (\forall a \in A, \forall b \in B)$,则集 A, B 分别位于开的半空间

$$X(u < r) 与 X(u > r)$$

中,此时说超平面 $X(u = r)$ **严格分离** A 与 B(图 2-3(b)).直观上很明显,即使 $A \cap B = \varnothing$,A 与 B 亦未必可用超平面分离.可分离性强烈地依赖于 A 与 B 的凸性.本节的中心结果是:

2.6.3 分离定理 设 $A, B \subset X$ 是非空凸集,$A^\circ \neq \varnothing$,$A^\circ \cap B = \varnothing$,则存在

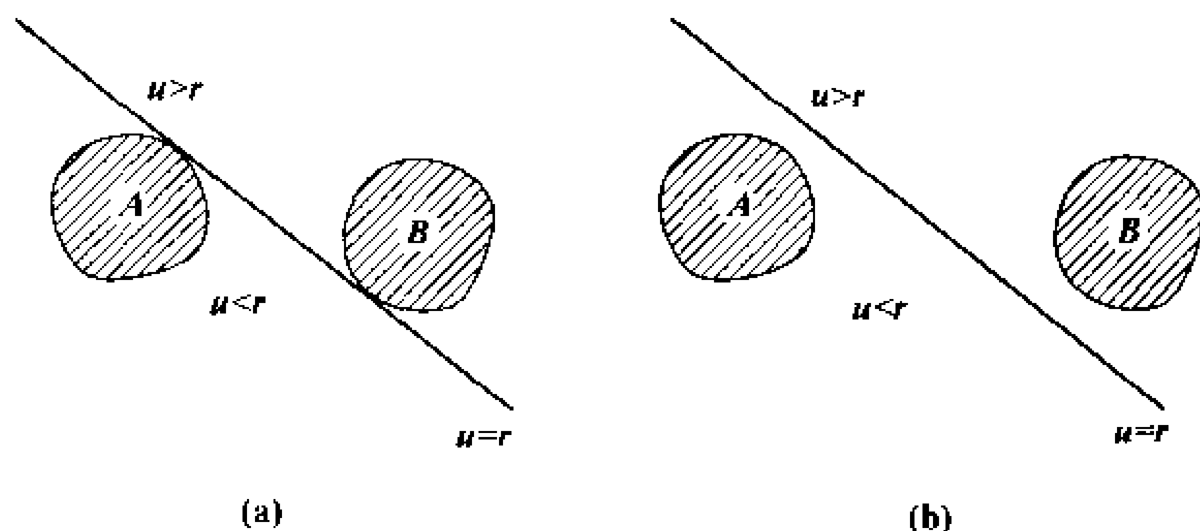


图 2－3

$u \in X^*, r \in \mathbf{R}$,使得[1]

$$u(A^\circ) < r \leqslant u(B), \tag{5}$$

且

$$u(A) \leqslant u(B). \tag{6}$$

定理的证明不过是 Hahn-Banach 定理的应用,但因包含一些技术性细节而略嫌过长,不如移入本章之末.

2.6.3 的以下推论用起来往往更加方便.

2.6.4 推论[2]　设 $A \subset X$ 是非空紧凸集,$B \subset X$ 是非空闭凸集,$A \cap B = \varnothing$,则存在 $u \in X^*, r \in \mathbf{R}$,使得不等式(4) 成立.

证　基本想法是用两个凸开集将 A, B 分离,然后应用 2.6.3. 令

$$U = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}, \quad V = \{x \in X : d(x, B) < \varepsilon\}.$$

显然 $A \subset U, B \subset V$, U 与 V 是开集(第一章习题 20). 稍细的验证知 U 与 V 亦是凸集. 选取 ε 充分小,使 $U \cap V = \varnothing$. 这种 ε 必存在. 否则,必有 $a_n \in A$, $b_n \in B$,使 $\| a_n - b_n \| \to 0$. 因 A 为紧集,不妨设 $a_n \to a \in A$,于是亦有 $b_n \to a$,因而 $a \in A \cap B$,与 $A \cap B = \varnothing$ 矛盾.

对 U 与 V 应用 2.6.3,得出 $u \in X^*, r \in \mathbf{R}$,使得 $u(U) < r \leqslant u(V)$. 因 $u(V)$ 是开区间(2.6.2(vi)),故必 $r < u(V)$. 这表明式(4) 成立.　□

分离定理广泛应用于性质很不相同的问题,谈不上提出什么一般规则. 不过,如下的初步归纳也许有用:如果问题涉及证明某个(组) 不等式,而该不等式能从形如(3) 或(4) 的不等式转化而来,那么,可能正是应用分离定理的机会来临.

---

[1] 只要以 $-u$ 替换 u,就可将不等式(5) 与(6) 倒过来. 今后应用 2.6.3(或 2.6.4) 时,常要用到这一点.

[2] 今后说到分离定理时,或指 2.6.3,或指 2.6.4.

考虑一种典型的特殊情况，即不等式(3)或(4)中 A,B 之一，例如 B 为凸锥的情况. 锥的定义十分简单：若一非空集 $K \subset X$ 满足条件

$$\alpha K \subset K \quad (\forall \alpha > 0), \tag{7}$$

则称 K 为锥；称 X^* 中的锥

$$K^* \triangleq \{u \in X^* : u(K) \geqslant 0\} \tag{8}$$

为 K 的**对偶锥**(请验证 K^* 确是锥!). 直观上，K 是锥意味着，对任何 $0 \neq x \in K$，K 包含过点 x 的射线 $\{\alpha x : \alpha > 0\}$. 在分离定理的应用中，锥的好处在于：若 $A \neq \varnothing$，B 是闭锥，$u \in X^*$，则

$$u(A) < u(B) \Rightarrow u(A) < 0, u(B) \geqslant 0; \tag{9}$$

$$u(A) \leqslant u(B) \Rightarrow u(A) \leqslant 0, u(B) \geqslant 0. \tag{10}$$

事实上，若 $u(A) < u(B)$，则

$$u(a) < \alpha u(b), \quad a \in A, b \in B, \alpha > 0. \tag{11}$$

在(11)中固定 a,α，令 $b = 0$ 得 $u(a) < 0$，因此 $u(A) < 0$. 若对某个 $b \in B$ 有 $u(b) < 0$，固定 a,b，令 $\alpha \to \infty$，从(11)得 $u(a) = -\infty$! 可见 $u(b) \geqslant 0 (\forall b \in B)$，即 $u(B) \geqslant 0$. 这就得出(9). 类似地可验证(10).

下面给出分离定理的若干应用.

2.6.5 命题 设 $K \subset X$ 是一闭凸锥，则

$$x \in K \Leftrightarrow \forall u \in K^* : u(x) \geqslant 0. \tag{12}$$

证 由(8)直接看出 $x \in K \Rightarrow \forall u \in K^* : u(x) \geqslant 0$. 逆命题的推导是证明的实质部分. 设 $x \in X \setminus K$，则 $\{x\}$ 与 K 分别为紧凸集与闭凸集且互不相交，于是由 2.6.4 有 $u \in X^*$，使得 $u(x) < u(K)$. 应用(9)得 $u(x) < 0, u(K) \geqslant 0$，即 $u \in K^*$，而 $u(x) \ngeqslant 0$. □

2.6.5 的结论看似简单，实际上有重大意义，不过其意义只有在适当解释后才充分显示出来. 在 X 中定义序 $\leqslant$：

$$x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in K (x, y \in X). \tag{13}$$

利用 K 为闭凸锥容易验证，由(13)定义的序 $\leqslant$ 有以下性质：

(i) 自反性：$x \leqslant x$；

(ii) 可传性：$x \leqslant y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$；

(iii) $x \leqslant y \Rightarrow \forall \alpha \geqslant 0 : \alpha x \leqslant \alpha y$；

(iv) $x_i \leqslant y_i (i = 1,2) \Rightarrow x_1 + x_2 \leqslant y_1 + y_2$；

(v) $x_n \leqslant y_n \Rightarrow \lim\limits_n x_n \leqslant \lim\limits_n y_n$，只要极限存在

(以上 $x, x_n, y, y_n, z \in X$). 如上的 $\leqslant$ 称为由闭凸锥 K 导入的**序**. 例如，$K = \mathbf{R}_+^n$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中导入一个序 $\leqslant$，使得对 $x = (x_i), y = (y_i) \in \mathbf{R}^n$ 有：

$$x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in \mathbf{R}_+^n \Leftrightarrow x_i \leqslant y_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

这个序就是通常所用的**向量序**.

借用序的说法,现在可将(12)改写成

$$x \geqslant 0 \Leftrightarrow \forall u \in K^*: u(x) \geqslant 0.$$

或一般地,

$$\boxed{x \geqslant y \Leftrightarrow \forall u \in K^*: u(x) \geqslant u(y)} \tag{14}$$

(对照 §2.5(2)!).(14)意味着:为证**向量**不等式 $x \geqslant y$(这通常是一个无限维问题),只要证**数量**不等式 $u(x) \geqslant u(y)$($\forall u \in K^*$)就够了,后者往往是一个初等的问题.现在读者已能意识到,贯穿于2.5.4与2.6.5中的实际上是同一精神:通过有界线性泛函,将一个**向量**问题转化为一个**数量**问题,从而达到简化的目的.

下面是应用分离定理的另一个例子.

2.6.6 择一定理 设 $T \in L(X, Y)$,$K \subset Y$ 是内部非空的闭凸锥,则以下两条件恰有一个满足:

(i) $\exists x \in X: Tx \in K^\circ$;

(ii) $\exists u \in K^*: u \neq 0, u(Tx) \equiv 0 (x \in X)$[①].

换言之,条件(i)(ii)必居其一,但不可得兼,因而称为**两择一**.

证 若 x, u 分别满足(i)与(ii),取球 $B_r(Tx) \subset K$,$r > 0$,则

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u(B_r(Tx)) &= u(Tx + B_r(0)) \\ &= u(Tx) + u(B_r(0)) = u(B_r(0)). \end{aligned}$$

这结合 $B_r(0) = -B_r(0)$ 得出 u 在 $B_r(0)$ 上为零,从而 $u = 0$(何故?),得出矛盾.因此(i)与(ii)不可得兼.

其次证"必居其一".不妨设(i)不满足,即 $\forall x \in X: Tx \overline{\in} K^\circ$,这意味着 $K^\circ \cap R(T) = \varnothing$.对 $K, R(T)$ 应用2.6.3,知有 $0 \neq u \in X^*$,使得(对照不等式(6))

$$u(R(T)) \leqslant u(K). \tag{15}$$

由(15)推出 $u(R(T)) \leqslant 0, u(K) \geqslant 0$(参照(10)),从而 $u \in K^*$.因 $R(T) = R(T)$,故必 $u(R(T)) = 0$,即 $u(Tx) \equiv 0$.这表明条件(ii)满足. □

在有限维的情况下,2.6.6有明显的解释.取 $T = A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{m \times n}$,$K = \mathbf{R}_+^m$,则 $(\mathbf{R}_+^m)^* = \mathbf{R}_+^m$,$(y_i) \in (\mathbf{R}_+^m)^\circ \Leftrightarrow y_i > 0 (1 \leqslant i \leqslant m)$;$\langle u, Ax \rangle = \langle x, A^{\mathrm{T}} u \rangle$.于是2.6.6意味着以下条件两择一:

(i) 不等式组 $\sum_j a_{ij} x_j > 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$ 有解 (x_j);

(ii) 齐次方程组 $\sum_i a_{ij} u_i = 0 (j = 1, 2, \cdots, n)$ 有非零解 (u_i).

---

① 利用 §2.8 中的记号,$u(Tx) \equiv 0$ 可写作 $T^* u = 0$.

近年来,各种形式的择一定理已经成为最优化理论中的重要工具.2.6.6 只不过是这类择一定理的最简单例子而已.

最后,举一个应用 2.6.3 于最优化问题的例子. 给定泛函 $f: X \to \mathbf{R}$ 与 $T \in L(X,Y)$, 设 Y 中已由某个闭凸锥 K 导入序 $\leqslant$. $x \in X$ 是最优化问题

$$\min f(x), \quad Tx \leqslant 0 \tag{16}$$

的解意味着, $T\bar{x} \leqslant 0$, 且 $f(\bar{x})$ 是 $f(x)$ 在集 $M = \{x \in X: -Tx \in K\}$(所谓可行集)上的最小值.

2.6.7 定理(最优性条件)　设 $f \in X^*$, $T \in L(X,Y)$ 为满射, Y 中由闭凸锥 K 导入序 $\leqslant$, $K^\circ \neq \varnothing$, $\bar{x} \in X$, $T\bar{x} \leqslant 0$. 则 $\bar{x}$ 是问题(16)的解的充要条件是, 存在 $\lambda \in K^*$, 使得

$$f(x) + \lambda(Tx) \equiv 0 (x \in X)^{①}, \quad \lambda(T\bar{x}) = 0. \tag{17}$$

证　充分性的证明较容易:设 $\lambda \in K^*$ 满足(17),则当 $x \in X$, $Tx \leqslant 0$ 时有:

$$f(x) - f(\bar{x}) = \lambda(T\bar{x} - Tx) = -\lambda(Tx) \geqslant 0,$$

这表明 $\bar{x}$ 是问题(16)的解.

现在设 $\bar{x}$ 是问题(16)的解. 令

$$C = \mathbf{R}_+ \times K, \quad D = \{(f(\bar{x} - x), -Tx): x \in X\}.$$

则易验证 C 是 $\mathbf{R} \times Y$ 中的闭凸锥, $C^\circ = \mathbf{R}_+^\circ \times K^\circ \neq \varnothing$; D 是 $\mathbf{R} \times Y$ 中的非空凸集. 若有 $(f(\bar{x} - x), -Tx) \in C^\circ \cap D$, 则

$$f(x) < f(\bar{x}), \quad Tx \leqslant 0,$$

这与 $\bar{x}$ 是问题(16)的解相矛盾. 因此 $C^\circ \cap D = \varnothing$. 由 2.6.3 有 $0 \neq \varphi \in (\mathbf{R} \times Y)^*$, 使得 $\varphi(D) \leqslant \varphi(C)$; 这又推出(用(10))

$$\varphi(D) \leqslant 0, \quad \varphi(C) \geqslant 0. \tag{18}$$

关键是如何解释(18). 首先, 由 2.4.8 有

$$(\mathbf{R} \times Y)^* = \mathbf{R}^* \times Y^* = \mathbf{R} \times Y^*,$$

故有 $\alpha \in \mathbf{R}$, $\lambda \in Y^*$, 使 $\varphi(r, y) = \alpha r + \lambda(y) (r \in \mathbf{R}, y \in Y)$. 于是 $\varphi(C) \geqslant 0$ 意味着

$$\alpha r + \lambda(y) \geqslant 0 \quad (\forall r \in \mathbf{R}_+, \forall y \in K). \tag{19}$$

取 $r = 0$ 从(19)得 $\lambda(K) \geqslant 0$, 故 $\lambda \in K^*$; 取 $y = 0$ 从(19)得 $\alpha \geqslant 0$. 其次, $\varphi(D) \leqslant 0$ 意味着

$$\alpha f(\bar{x} - x) - \lambda(Tx) \leqslant 0 \quad (\forall x \in X),$$

即

$$\alpha f(x) + \lambda(Tx) \geqslant \alpha f(\bar{x}) \quad (\forall x \in X). \tag{20}$$

考虑到 f, λ, T 的线性性, 不难从(20)推出

---

① $f(x) + \lambda(Tx) \equiv 0$ 可写作 $f + T^*\lambda = 0$, 参看前页的注.

$$\alpha f(x) + \lambda(Tx) \equiv 0 \quad (x \in X). \tag{21}$$

若 $\alpha = 0$,则从(21)得 $\lambda(Tx) \equiv 0$,这与 $R(T) = Y$ 一起得 $\lambda = 0$,与 $\varphi \neq 0$ 矛盾.可见 $\alpha > 0$,因此又不妨设 $\alpha = 1$(否则以 λ/α 代 λ).在(20)中令 $x = \bar{x}$ 得 $\lambda(T\bar{x}) \geqslant 0$.另一方面,从 $T\bar{x} \leqslant 0$ 与 $\lambda \in K^*$ 得 $\lambda(T\bar{x}) \leqslant 0$,因此 $\lambda(T\bar{x}) = 0$.这表明 λ 满足条件(17). □

在最优化理论中,问题(16)中的 f 与 T 都不必是线性的,但仍然可导出类似于(17)的最优性条件.2.6.7 只能算是这一类的结果中最简单的一个.然而,在应用分离定理这一点上,2.6.7 之证明所体现的精神,已具有普遍意义.

§2.7 弱收敛

依范数收敛固然有良好的性质,但往往要求过强.例如,在空间 $C(J)$ 中依范数收敛就是一致收敛.我们知道,即使对数学分析中的一些问题,如积分号下取极限,一致收敛也不是必要的.在很多情况下,一种较弱的收敛可能包含问题所需的信息,而验证收敛条件或许容易得多.因此,必要考虑弱于范数收敛的收敛性.

以下设 X 是给定的赋范空间.

2.7.1 定义 设 $\{x_n\} \subset X$ 与 $\{u_n\} \subset X^*$ 是两个序列.

(i) 若 $x \in X$, $\forall u \in X^*$,有 $u(x_n) \to u(x)(n \to \infty)$,则说 $\{x_n\}$ **弱收敛**于 x,记作 $x_n \rightharpoonup x(n \to \infty)$.

(ii) 若 $u \in X^*$, $\forall x \in X$,有 $u_n(x) \to u(x)(n \to \infty)$,则说 $\{u_n\}$ **弱* 收敛**于 u,记作 $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u(n \to \infty)$.

直接看出,$x_n \to x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$;$u_n \to u \Rightarrow u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$,即范数收敛强于弱收敛或弱*收敛.因此,也将范数收敛称为**强收敛**.

若 $\dim X < \infty$,例如设 $X = \mathbf{K}^n$,则在 X 中

$$\begin{aligned} x^{(k)} \rightharpoonup x &\Rightarrow \langle x^{(k)}, e_i \rangle \to \langle x, e_i \rangle \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \\ &\Rightarrow x_i^{(k)} \to x_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \\ &\Rightarrow x^{(k)} \to x \end{aligned}$$

($\{e_i\}$ 是 $\mathbf{K}^n$ 的标准基),这表明 $x^{(k)} \to x \Leftrightarrow x^{(k)} \rightharpoonup x(k \to \infty)$.因此,有限维空间中强收敛与弱收敛没有区别.

下面对弱收敛给出**形式上**更弱的条件,以便实际判定弱收敛时更加容易.在以下定理中,基本集概念是关键的(参考 1.3.6(ii)).

2.7.2 定理 设 B, G 分别为 X 与 X^* 的基本集.

(i) 设 $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$.则 $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \{x_n\}$ 有界,且 $\forall u \in G$,有

$$u(x_n) \to u(x) \quad (n \to \infty).$$

(ii) 设$\{u_n\}\subset X^*$,$u\in X^*$.若$\{u_n\}$有界,且$\forall x\in B$,有$u_n(x)\to u(x)$,则$u_n\xrightarrow{*}u(n\to\infty)$.当$X$完备时其逆亦真.

证 (i) 若$x_n\rightharpoonup x$,则$\forall u\in X^*$:$\{u(x_n)\}$有界,于是由2.5.9知$\{x_n\}$有界.

反之,设$\sup\limits_n\|x_n\|=\beta<\infty$,$\forall u\in G$:$u(x_n)\to u(x)(n\to\infty)$.任给$u\in X^*$,$\forall\varepsilon>0$,取$v\in\text{span}G$,使$\|u-v\|<\varepsilon$.显然亦有

$$v(x_n)\to v(x)\quad(n\to\infty),$$

于是有$N>0$,使得

$$|v(x_n)-v(x)|<\varepsilon\quad(\forall n\geqslant N).$$

这样,当$n\geqslant N$时有

$$\begin{aligned}|u(x_n)-u(x)|&\leqslant|u(x_n)-v(x_n)|+|v(x_n)-v(x)|\\&\quad+|v(x)-u(x)|\\&<\|u-v\|(\|x_n\|+\|x\|)+\varepsilon\\&<\varepsilon(\beta+\|x\|+1),\end{aligned}$$

可见$u(x_n)\to u(x)(n\to\infty)$.因此$x_n\rightharpoonup x$.

(ii) 的证明是类似的,仅有的区别是,在证$u_n\rightharpoonup u\Rightarrow\sup\limits_n\|u_n\|<\infty$时,为用2.4.1,要求$X$完备. □

现在应用2.7.2来判定某些具体空间中的弱收敛性.

2.7.3 推论 设$1<p=\dfrac{q}{q-1}<\infty$,则在$l^p$中$x^{(n)}\rightharpoonup x\Leftrightarrow\sup\limits_n\|x^{(n)}\|_p<\infty$且$x_i^{(n)}\to x_i(n\to\infty,i=1,2,\cdots)$.换言之,$l^p$中有界序列弱收敛亦即按坐标收敛.

证 只需注意$\{e_i:i\in\mathbf{N}\}$是$l^q(=(l^p)^*)$的基本集(1.3.8),此处$e_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$,第$i$项是1. □

注.若去掉有界性条件,那么按坐标收敛推不出弱收敛,如可用l^2中的序列$\{ne_n\}$为例说明.

2.7.4 推论 设$1<p=\dfrac{q}{q-1}<\infty$,$J=[a,b](a<b)$,则在$L^p(J)$中$u_n\rightharpoonup u\Leftrightarrow\sup\limits_n\|u_n\|_p<\infty$且

$$\int_a^x u_n(t)\mathrm{d}t\to\int_a^x u(t)\mathrm{d}t\quad(n\to\infty,x\in J).\tag{1}$$

证 只需注意$\{\varphi_x:x\in J\}$是$L^q(J)(=L^p(J)^*)$的基本集(参考1.3.8),其中φ_x是区间$[a,x]$的特征函数. □

2.7.5 推论 设$\{e_i:i\in\mathbf{N}\}$是Hilbert空间X的标准正交基.则在X中$x^{(n)}\rightharpoonup x\Leftrightarrow\sup\limits_n\|x^{(n)}\|<\infty$且$\hat{x}_i^{(n)}\to\hat{x}_i(n\to\infty,i\in\mathbf{N})$,其中$\hat{x}_i=\langle x,e_i\rangle$(参看1.7.5);这意味着$X$中有界序列弱收敛即依正交坐标收敛.

证 只需注意:由 2.4.3,有

$$x^{(n)} \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \langle x^{(n)}, y\rangle \to \langle x, y\rangle \quad (n \to \infty, \forall y \in X).$$

而$\{e_i : i \in \mathbf{N}\}$是 X 的基本集(1.7.5(ii)). □

特别,2.7.5 推出,2.7.5 中的序列$\{e_i\}$弱收敛于零,但它显然不强收敛于零.

2.7.6 推论 设$\{f_n\} \subset C(J)^*$,则 $f_n \xrightarrow{*} f \Leftrightarrow \sup\limits_n \| f_n \| < \infty$,且 $f_n(u_k) \to f(u_k)(n \to \infty, k = 0,1,\cdots)$,其中 $u_k(x) = x^k$.

证 只需注意$\{u_k : k \geqslant 0\}$是 $C(J)$ 的基本集(参考 1.3.8). □

2.7.6 有一个有趣的应用.

2.7.7 例(求积公式的收敛性,Polya,1933) 给定区间 $J = [a, b]$ 的分点 x_k^n:

$$a \leqslant x_0^n < x_1^n < \cdots < x_n^n \leqslant b,$$

$\{A_k^n : k = 0,1,\cdots, n, n = 1,2,\cdots\} \subset \mathbf{R}$. 设求积公式

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^n A_k^n u(x_k^n) \tag{2}$$

有 n 阶代数精度,即当 u 是次数 $\leqslant n$ 的多项式时(2) 成为严格等式. 则对任何 $u \in C(J)$ 成立

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}x = \lim_n \sum_{k=0}^n A_k^n u(x_k^n) \tag{3}$$

(此时说求积公式(2) 收敛) 的充要条件是

$$\sup_n \sum_{k=0}^n |A_k^n| < \infty. \tag{4}$$

证 定义 $C(J)$ 上的线性泛函

$$f_n(u) = \sum_{k=0}^n A_k^n u(x_k^n), \quad u \in C(J), \tag{5}$$

则

$$|f_n(u)| \leqslant \| u \|_0 \sum_{k=0}^n |A_k^n|,$$

因此 $f_n \in C(J)^*$ 且 $\| f_n \| \leqslant \sum\limits_{k=0}^n |A_k^n| \triangleq \beta_n$. 其次,取 $u \in C(J)$,使 $u(x_k^n) = \operatorname{sgn} A_k^n$,且 $\| u \|_0 = 1$(此种 u 之存在直观上甚为显然),则

$$\begin{aligned}\beta_n &= \sum_{k=0}^n A_k^n u(x_k^n) = f_n(u) \\ &\leqslant \| f_n \| \, \| u \|_0 = \| f_n \|,\end{aligned}$$

故得 $\| f_n \| = \beta_n (n = 1,2,\cdots)$. 令

$$f(u)=\int_a^b u(x)\mathrm{d}x,\quad u\in C(J),$$

则 $f\in C(J)^*$（参看2.4.6）. 式(3)相当于 $f_n(u)\to f(u)(n\to\infty)$，因而式(3)恒成立 $\Leftrightarrow f_n\xrightarrow{*}f$. 已给条件表明(3)对任何多项式 u 成立，于是由2.7.6知

$$f_n\xrightarrow{*}f\Leftrightarrow\sup_n\|f_n\|<\infty\Leftrightarrow\text{式(4)成立}.\qquad\square$$

注. 若 $A_k^n\geqslant 0$，则取 $u\equiv 1$ 得

$$b-a=f_n(u)=\sum_{k=1}^n A_k^n=\beta_n,$$

可见条件(4)满足，因此求积公式(2)总是收敛的.

现在再回到一般的弱收敛问题. 关于强收敛的基本性质，例如极限的唯一性、与线性运算的相容性（这意味着从 $x_n\to x,y_n\to y,\alpha_n\to\alpha$ 推出 $x_n+y_n\to x+y$，$\alpha_nx_n\to\alpha x$）、收敛序列子列的收敛性等，都很容易推广到弱收敛与弱* 收敛. 但关于弱收敛的深入讨论显示出很大的复杂性，且与强收敛有重大差别，这些都不能在此处详述. 下面只叙述一个最重要的结果，它不仅应用广泛，而且显示出弱收敛与强收敛的深刻差别.

2.7.8 定理 自反 Banach 空间中任何有界序列包含弱收敛子列.

显然，定理中的"弱收敛子列"绝不能改为"强收敛子列"，除非空间是有限维的（参看1.5.8）. 2.7.8的意义在于，它表明自反空间中的有界集在弱收敛意义上具有某种"紧性". 这样，就可将基于紧性的一些结果推广到弱收敛的情况. 一个简单例子是：

2.7.9 定理 设 X 是自反 Banach 空间，$D\subset X$ 是有界闭凸集，$f:D\to\mathbf{R}$ 在以下意义上连续：

$$x_n\rightharpoonup x(x,x_n\in D)\Rightarrow f(x)\leqslant\varliminf_n f(x_n).\tag{6}$$

则 $f(x)$ 在 D 上取得最小值.

证 证明基本上是1.5.5(ii)之证的一个改制. 令 $\alpha=\inf\limits_{x\in D}f(x)$. 取序列 $\{x_n\}\subset D$，使 $f(x_n)\to\alpha(n\to\infty)$. 由2.7.8，不妨设 $x_n\rightharpoonup x$. 必定 $x\in D$，否则由分离定理(2.6.4)有 $u\in X^*,r\in\mathbf{R}$，使

$$u(x)<r<u(D),$$

这与 $u(x_n)\to u(x)$ 相矛盾. 于是用条件(6)得

$$f(x)\leqslant\lim_n f(x_n)=\alpha\leqslant f(x),$$

这表明 $f(x)=\alpha$ 是 f 在 D 上的最小值. $\square$

2.7.9在极值理论中用处颇大.

现在将弱收敛思想用于算子序列. 设 $T_n,T\in L(X,Y),n=1,2,\cdots$. 对 $\{T_n\}$ 可考虑由 von Neumann 引进的以下三种收敛性：

一致收敛：$\|T_n - T\| \to 0$（$\Leftrightarrow$ 在 $B_1(0)$ 上 $T_n x \rightrightarrows Tx$）；

强收敛：$T_n x \to Tx$（$\forall x \in X$）；

弱收敛：$T_n x \rightharpoonup Tx$（$\forall x \in X$）.

显然一致收敛 $\Rightarrow$ 强收敛 $\Rightarrow$ 弱收敛.在无限维空间中，三者一般是互不相同的.

2.7.10 例　1° 设 $T_n \in L(l^2)(n = 1,2,\cdots)$ 定义为

$$T_n x = \sum_{i>n} x_i e_i, \quad x = (x_i) \in l^2,$$

其中 $\{e_i\}$ 是 l^2 的标准基.显然 $\{T_n\}$ 强收敛于零算子.因 $\|T_n\| = 1(n = 1,2,\cdots)$，$\{T_n\}$ 并不一致收敛于零.

2° 设 $T_n \in L(l^2)(n = 1,2,\cdots)$ 定义为

$$T_n x = x_1 e_n, \quad x = (x_i) \in l^2,$$

则显然 $T_n x \rightharpoonup 0$，可见 $\{T_n\}$ 弱收敛于零.但 $T_n e_1 = e_n \not\to 0(n \to \infty)$，因此 $\{T_n\}$ 不强收敛于零.

2.7.2 可改制成关于算子序列强收敛的以下结果.

2.7.11 定理　设 X, Y 是 Banach 空间，$\{T_n\} \subset L(X, Y)$，则 $\{T_n\}$ 强收敛的充要条件是：

(i) $\sup\limits_n \|T_n\| < \infty$.

(ii) 存在 X 的基本集 B，使得 $\forall x \in B$：$\{T_n x\}$ 收敛.

证　必要性直接从一致有界原理得出.

设条件(i)(ii) 满足，则 $\forall x \in \mathrm{span}B$，存在

$$Tx = \lim_n T_n x. \tag{7}$$

$\forall y \in X, \varepsilon > 0$，取 $x \in \mathrm{span}B$，使 $\|x - y\| < \varepsilon$.则由

$$\begin{aligned}\|T_m y - T_n y\| &\leqslant \|T_m y - T_m x\| + \|T_m x - T_n x\| \\ &\quad + \|T_n x - T_n y\| \\ &\leqslant \varepsilon(\|T_m\| + \|T_n\|) + \|T_m x - T_n x\|\end{aligned}$$

推出 $\{T_n y\}$ 收敛.故(7) 定义一个算子 $T: X \to Y$，它显然是线性的.由

$$\|Tx\| = \lim_n \|T_n x\| \leqslant \varliminf_n \|T_n\| \|x\|$$

推出 $\|T\| \leqslant \varliminf_n \|T_n\| < \infty$，故 $T \in L(X, Y)$，$\{T_n\}$ 强收敛于 T.　□

注意 2.7.11 中附带得出了估计

$$\|T\| \leqslant \varliminf_n \|T_n\|. \tag{8}$$

这一结果当然亦适用于有界线性泛函序列.

* §2.8　对偶算子

在 §2.4 中已指出,空间 X 与 X^* 之间的对偶关系,有利于对空间 X 与 X^* 的研究.同样的思想也可用到有界线性算子与其对偶算子,后者正是本节要讨论的.

以下设 X,Y 是给定的赋范空间.

2.8.1 定义　任给 $T\in L(X,Y)$,T 决定一个算子

$$T^*:Y^*\to X^*,v\to v\circ T, \tag{1}$$

称它为 T 的**对偶算子**.

注意算子 T^* 的自变量 v 是变动的有界线性泛函.为适应这一情况,我们采用 §2.4 中已提到的记号 $\langle u,x\rangle=u(x)(u\in X^*,x\in X)$,这有助于平等地看待向量与有界线性泛函.这样,算子 T^* 决定于恒等式

$$\langle T^*v,x\rangle=\langle v,Tx\rangle\quad(v\in Y^*,x\in X). \tag{2}$$

在对偶算子理论中,将反复用到恒等式(2).

首先利用(2)对 T^* 作出一些初步结论.因(2)式右端对 v 是线性的,故 T^* 是线性算子.其次,由

$$|\langle T^*v,x\rangle|\leqslant\|v\|\,\|Tx\|\leqslant\|v\|\,\|T\|\,\|x\|$$

推出 $\|T^*v\|\leqslant\|T\|\,\|v\|$,因此 $T^*\in L(Y^*,X^*)$.

下面考虑若干具体例子.

2.8.2 例　**1°** 设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{m\times n}=L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$,令 $A^*=(b_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times m}$,则依式(2)有

$$a_{ij}=\langle e_i,Ae_j\rangle=\langle A^*e_i,e_j\rangle=b_{ji}$$

($\{e_j\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的标准基),可见 $A^*=A^{\mathrm{T}}$(A 的转置).这就表明,对偶算子原来是转置矩阵概念在无限维空间中的推广.

2° $A=(a_{ij})$ 是一实无穷矩阵,满足 $\sum\limits_{i,j}|a_{ij}|^2<\infty$,则依 2.2.2 有 $A\in L(l^2)$,从而 $A^*\in L(l^2)$.$\forall x,y\in l^2$(看作实空间),有

$$\begin{aligned}\langle A^*y,x\rangle&=\langle y,Ax\rangle=\sum_i y_i\sum_j a_{ij}x_j\\&=\sum_j\Big(\sum_i a_{ij}y_i\Big)x_j=\sum_i\Big(\sum_j a_{ji}y_j\Big)x_i,\end{aligned}$$

可见 $A^*=(a_{ji})=A^{\mathrm{T}}$.

3° 设 $T\in L(L^2(J))$ 依 §2.2(9),$\int_a^b\int_a^b|K(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty$,则 $T^*\in L(L^2(J))$,$\forall u,v\in L^2(J)$(看作实空间),有

$$\langle T^*v,u\rangle=\langle v,Tu\rangle=\int_a^b v(x)\mathrm{d}x\int_a^b K(x,y)u(y)\mathrm{d}y$$

$$-\int_a^b u(y)\mathrm{d}y\int_a^b K(x,y)v(x)\mathrm{d}x,$$

故

$$(T^*v)(x)=\int_a^b K(y,x)v(y)\mathrm{d}y.$$

可见 T^* 亦为形如 §2.2(9) 的积分算子，它的核 $K(y,x)$，可看作是 T 的核 $K(x,y)$ 的"转置".

若将"取对偶"看作一种运算，则导致考虑映射

$$*: L(X,Y)\to L(Y^*,X^*), T\to T^*, \tag{3}$$

今将其基本性质综合于下.

2.8.3 命题 任给 $T,S\in L(X,Y), A\in L(Y,Z), \alpha,\beta\in\mathbf{K}$，成立以下等式：

$$(\alpha T+\beta S)^*=\alpha T^*+\beta S^*; \tag{4}$$

$$(AT)^*=T^*A^*; \tag{5}$$

$$(T^{-1})^*=(T^*)^{-1}(\text{若 } T \text{ 是同构}); \tag{6}$$

$$T^{**}\big|X=T(T^{**}=(T^*)^*); \tag{7}$$

$$\|T^*\|=\|T\|. \tag{8}$$

证 直接利用恒等式(2)易验证(4)(5). 若 T 为同构，则 TT^{-1} 与 $T^{-1}T$ 皆为单位算子，于是由(5)推出

$$(T^{-1})^*T^* \quad 与 \quad T^*(T^{-1})^*$$

分别为 Y^* 与 X^* 上的单位算子，这得出(6).

设 $X\to X^{**}, x\to\tilde{x}$ 是正则嵌入(参看 §2.5(9))，则由(2)有

$$\begin{aligned}\langle\widetilde{Tx},v\rangle&=\langle v,Tx\rangle=\langle T^*v,x\rangle\\&=\langle\tilde{x},T^*v\rangle=\langle T^{**}\tilde{x},v\rangle\quad(x\in X,v\in Y^*),\end{aligned}$$

这表明 $\widetilde{Tx}=T^{**}\tilde{x}$. 若等同 x 与 $\tilde{x}$，Tx 与 $\widetilde{Tx}$，则可认为 $Tx=T^{**}x(\forall x\in X)$，这得出(7).

最后，结合 §2.1(4) 与 §2.5(10) 得出(8)：

$$\begin{aligned}\|T^*\|&=\sup_{\|v\|=1}\|T^*v\|=\sup_{\|v\|=1}\sup_{\|x\|=1}|v(Tx)|\\&=\sup_{\|x\|=1}\sup_{\|v\|=1}|v(Tx)|\\&=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|=\|T\|.\end{aligned}$$

□

性质(4),(8)表明映射(3)是一等距嵌入(当 X,Y 为自反空间时它为等距同构)，这就可将有关算子的一些结论转移到其对偶算子. 例如，若依算子范数有 $T_n\to T$，则必定 $T_n^*\to T^*$.

考虑 T 与 T^* 之间有哪些有用的联系,是一重要课题. 首先是一个较简单的结果.

2.8.4 命题　设 $T \in L(X,Y)$,则

$$N(T) = {}^{\perp}R(T^*), N(T^*) = R(T)^{\perp}; \tag{9}$$

$$^{\perp}N(T^*) = \overline{R(T)}. \tag{10}$$

(9)(10) 中的记号依 §2.4(11)(12).

证　对于(9) 仅证前一式,后者是类似的. $\forall x \in X$,有

$$\begin{aligned} x \in N(T) &\Leftrightarrow Tx = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall v \in Y^*:\langle v, Tx\rangle = 0 \quad (\text{用 } 2.5.4) \\ &\Leftrightarrow \forall v \in Y^*:\langle T^*v, x\rangle = 0 \quad (\text{用}(2)) \\ &\Leftrightarrow x \in {}^{\perp}R(T^*). \quad (\text{用 } \S 2.4(12)) \end{aligned}$$

利用式(2) 直接看出 $R(T) \subset {}^{\perp}N(T^*)$. 因 ${}^{\perp}N(T^*)$ 是闭的,故

$$\overline{R(T)} \subset {}^{\perp}N(T^*). \tag{11}$$

若 $y \in Y \setminus \overline{R(T)}$,则由 2.5.3 有 $v \in \overline{R(T)}^{\perp}$ ($= R(T)^{\perp} = N(T^*)$,用(9) 与 2.4.9),使得 $v(y) \neq 0$,因此 $y \overline{\in} {}^{\perp}N(T^*)$. 这与(11) 一起得出等式(10). □

观察(9)(10) 之后,你可能会猜想,似乎应有 $N(T)^{\perp} = \overline{R(T^*)}$. 但事实并非如此. 要使这个等式成立,$\overline{R(T^*)}$ 必须代之以 $R(T^*)$ 的"弱闭包",此处已无法深论了.

等式 $N(T) = {}^{\perp}R(T^*)$ 不过是以下两条件等价性的缩写:

(i) x 是"齐次线性方程"$Tx = 0$ 的解;

(ii) x"零化" 所有 $T^*v(v \in Y^*)$.

这一事实的某种原型早为泛函分析的开创者们所知道,而且在积分方程等问题中被充分考虑.

在线性代数中有以下熟知结论:若 $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$,则 $\operatorname{rank}A = m \Leftrightarrow$ 线性方程 $A^{\mathrm{T}}x = 0$ 只有零解. 换成算子的说法就是:A 为满射 $\Leftrightarrow N(A^{\mathrm{T}}) = \{0\}$. 下面是这一事实的无限维推广.

2.8.5 满射定理　设 X, Y 是Banach空间,$T \in L(X,Y)$. 则以下结论成立:

(i) $R(T) = Y \Leftrightarrow T^*$ 有有界逆.

(ii) $R(T^*) = X^* \Leftrightarrow T$ 有有界逆.

证　(i) 首先设 $R(T) = Y$. 由(9) 有 $N(T^*) = Y^{\perp} = \{0\}$,故 T^* 为单射,$(T^*)^{-1}: R(T^*) \to Y^*$ 是一线性算子. 此算子必有界,否则 $\exists v_n \in Y^*$,使 $\|T^*v_n\| = 1$, 而 $\|v_n\| \geqslant n(n = 1,2,\cdots)$. 令 $w_n = v_n\|v_n\|^{-1/2}$, 则 $\|T^*w_n\| \to 0$,从而 $T^*w_n \xrightarrow{*} 0$,即 $w_n(Tx) \to 0(\forall x \in X)$,这结合 $R(T) = Y$ 得 $w_n \xrightarrow{*} 0$. 但 $\|w_n\| = \|v_n\|^{1/2} \to \infty$,得出矛盾.

其次设 T^* 有有界逆,要证 $R(T)=Y$. 为此需利用2.10.1,与2.10.2,证明 $\exists\delta>0$,使 $B_\delta(0)\subset\overline{TB_1(0)}$. 若不存在这样的 δ,则有 $\{y_n\}\subset Y$,使 $y_n\to 0$,但 $y_n\overline{\in}\overline{TB_1(0)}(n=1,2,\cdots)$. 因 $\overline{TB_1(0)}$ 是闭凸集(2.6.2(iii)(iv)),由分离定理[①]有 $v_n\in Y^*$,使 $v_n(y_n)>v_n(\overline{TB_1(0)})$,这推出 $(T^*v_n)(B_1(0))<\|v_n\|\|y_n\|$,从而 $\|T^*v_n\|\leqslant\|v_n\|\|y_n\|$. 另一方面,由 $(T^*)^{-1}$ 有界知存在 $\beta>0$,使 $\|T^*v_n\|\geqslant\beta\|v_n\|$,这导致 $\beta\leqslant\|y_n\|$,与 $y_n\to 0$ 矛盾.

(ii) 若 $R(T^*)=X^*$,则由已证的(i)知 $T^{**}:X^{**}\to R(T^{**})$ 是拓扑同构,因而 $T:X\to R(T)$ 亦必为拓扑同构,即 T 有有界逆. 反之,若 T 有有界逆,则对任给 $u\in X^*$,$v=u\circ T^{-1}$ 是 $R(T)$ 上的有界线性泛函. 由 Hahn-Banach 定理,不妨设 v 已扩张为 Y 上的有界线性泛函. 因此 $u=v\circ T=T^*v\in R(T^*)$. 可见 $R(T^*)=X^*$. □

2.8.6 推论 设 X,Y 是Banach空间,$T\in L(X,Y)$,则以下四条件互相等价:

(i) $T:X\to Y$ 是拓扑同构;

(ii) $T^*:Y^*\to X^*$ 是拓扑同构;

(iii) T 与 T^* 皆有有界逆;

(iv) T 与 T^* 皆为满射.

§2.9 紧线性算子

设 X,Y 是给定的赋范空间.

若 $T\in L(X,Y)$,$\{x_n\}\subset X$ 有界,则 $\{Tx_n\}$ 是 Y 中的有界序列. 当 $\dim Y<\infty$ 时,$\{Tx_n\}$ 必含收敛子列;若 Y 是无限维空间,则未必如此. 这是处理无限维空间上的线性算子的主要困难之一. 如果希望达到一个更接近于有限维空间情形的理论,就必须限于考虑较特殊类型的线性算子,紧线性算子正适于这一目的.

2.9.1 定义 设 $T:X\to Y$ 为线性算子. 若对任何有界序列 $\{x_n\}\subset X$,$\{Tx_n\}$ 有收敛子列,则称 T 为**紧线性算子**.

直接看出,线性算子 $T:X\to Y$ 是紧线性算子的充要条件是,T 映 X 中的有界集为 Y 中的相对紧集(参看1.5.1与1.5.4).

以 $\mathrm{CL}(X,Y)$ 记从 X 到 Y 的紧线性算子之全体,$\mathrm{CL}(X,X)$ 就简写作 $\mathrm{CL}(X)$. 显然 $\mathrm{CL}(X,Y)\subset L(X,Y)$;当 $\dim X<\infty$ 或 $\dim Y<\infty$ 时有 $\mathrm{CL}(X,Y)=L(X,Y)$. 因此,若 $T\in L(X,Y)$,$\dim R(T)<\infty$,则必 $T\in$

① 对于复 Banach 空间 Y,此处证明还需稍加改进.

CL(X,Y),这样的 T 称为**有限秩算子**.

下面给出用弱收敛对紧线性算子的刻画.

2.9.2 定理 设 $T\in L(X,Y)$.若 T 是紧线性算子,则它有性质:

$$x_n\rightharpoonup x\Rightarrow Tx_n\to Tx\quad(n\to\infty). \tag{1}$$

当 X 是自反空间时,其逆亦真.

证 设 $T\in \mathrm{CL}(X,Y)$,在 X 中 $x_n\rightharpoonup x(n\to\infty)$.直接看出 $Tx_n\rightharpoonup Tx$(你在题 39 中证此!).若 $Tx_n\not\to Tx$,则有 $\varepsilon>0$ 及 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$,使得

$$\| Tx_{n_k}-Tx\|\geqslant\varepsilon,\quad k=1,2,\cdots. \tag{2}$$

因 $\{x_n\}$ 有界(2.7.2),故 $\{Tx_{n_k}\}$ 必含收敛子列,为记号简便,不妨就设 $Tx_{n_k}\to y$ $(k\to\infty)$.这推出 $Tx_{n_k}\rightharpoonup y$,因此 $y=Tx$,$Tx_{n_k}\to Tx$,这与式(2)矛盾.可见条件(1)满足.

其次设 X 是自反空间,条件(1)满足.若 $\{x_n\}\subset X$ 是有界序列,则由 2.7.8 知 $\{x_n\}$ 含弱收敛子列.设 $x_{n_k}\rightharpoonup x(k\to\infty)$,则由条件(1)有 $Tx_{n_k}\to Tx$.因此 T 是紧线性算子. □

如 §1.5 中所指出的,无限维空间中紧集的出现是极不寻常的.据此可以想见,紧线性算子也应是稀有之物.例如,当 $\dim X=\infty$ 时,X 上的所有可逆线性算子皆非紧线性算子(见下面的 2.9.5).幸而,还是有不少常用的线性算子是紧算子.下面是几个典型例子.

2.9.3 例 1° 设 $J=[a,b](a<b)$,$K(\cdot,\cdot)\in C(J\times J)$,

$$(Tu)(x)=\int_a^b K(x,y)u(y)\mathrm{d}y,\quad u\in C(J),x\in J.$$

在 2.2.4 中已说明 $T\in L(C(J))$.为证 $T\in \mathrm{CL}(C(J))$,只需对任给有界集 $A\subset C(J)$,指明 TA 在 $C(J)$ 中相对紧;由 Arzela-Ascoli 定理(1.5.9),又只要指明 TA 等度连续,这由以下估计看出:

$$\begin{aligned}|(Tu)(x)-(Tu)(z)|&=\left|\int_a^b K(x,y)u(y)\mathrm{d}y-\int_a^b K(z,y)u(y)\mathrm{d}y\right|\\&\leqslant\int_a^b|K(x,y)-K(z,y)||u(y)|\mathrm{d}y\\&\leqslant \mathrm{const}\int_a^b|K(x,y)-K(z,y)|\mathrm{d}y\quad(\forall u\in A).\end{aligned}$$

2° 设 T 如上,但假定 $K(\cdot,\cdot)\in L^2(J\times J)$,则有 $T\in \mathrm{CL}(L^2(J))$.事实上,若在 $L^2(J)$ 中 $u_n\rightharpoonup u$,则可证明 $\|Tu_n\|_2\to\|Tu\|_2$,从而

$$\|Tu_n-Tu\|_2\to 0(\text{参考题 36}),$$

于是可用定理 2.9.2.令 $\beta=\sup\limits_n\|u_n\|_2<\infty$.因 $K(\cdot,\cdot)\in L^2$,故对几乎所有 $x\in J$,有 $K(x,\cdot)\in L^2(J)$;对这些 x,有

$$Tu_n(x) = \langle u_n, \overline{K(x,\cdot)}\rangle \to \langle u, \overline{K(x,\cdot)}\rangle = Tu(x),$$

即 $Tu_n \to Tu$, a.e. $(n\to\infty)$. 其次,

$$|Tu_n(x)|^2 = \left|\int_a^b K(x,y)u_n(y)\mathrm{d}y\right|^2$$

$$\leqslant \beta^2\int_a^b |K(x,y)|^2\mathrm{d}y \quad (\text{用 Schwarz 不等式}),$$

故可用控制收敛定理得

$$\lim_n \|Tu_n\|_2^2 = \lim_n\int_a^b |Tu_n(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b |Tu(x)|^2\mathrm{d}x = \|Tu\|_2^2.$$

紧线性算子的一个重要来源是,由已知的紧线性算子通过一定的运算构成新的紧线性算子.以下命题概括了有关规则.

2.9.4 命题 (i) 紧线性算子的线性组合仍为紧线性算子,因此 $\mathrm{CL}(X,Y)$ 是 $L(X,Y)$ 的子空间.

(ii) 紧线性算子与有界线性算子的复合算子是紧线性算子, 即若 $T\in \mathrm{CL}(X,Y), A\in L(Y,Z), B\in L(W,X)$,则

$$AT\in \mathrm{CL}(X,Z),\ TB\in \mathrm{CL}(W,Y).$$

(iii) 若 Y 完备,$\{T_n\}\subset \mathrm{CL}(X,Y)$, $T\in L(X,Y)$, $\|T_n - T\|\to 0(n\to\infty)$,则 $T\in \mathrm{CL}(X,Y)$,即 $\mathrm{CL}(X,Y)$ 是 $L(X,Y)$ 的闭子空间.

证 (i)(ii) 的证明是直接的.

(iii) 令 $B = B_1(0)\subset X$,只要证 TB 相对紧;而为此又只需证 TB 全有界 (1.5.4). $\forall \varepsilon>0$,取 n,使 $\|T_n - T\|<\varepsilon$.因 T_nB 全有界,故有有限集 $\{y_i\}\subset Y$,使 $T_nB\subset\bigcup_i B_\varepsilon(y_i)$. 于是

$$TB\subset T_nB + B_\varepsilon(0)$$

$$\subset \bigcup_i B_\varepsilon(y_i) + B_\varepsilon(0)$$

$$\subset \bigcup_i B_{2\varepsilon}(y_i),$$

这表明 TB 相对紧. □

2.9.5 推论 若 $\dim X = \infty$, $T\in L(X,Y)$ 有有界逆,则 T 必非紧线性算子.

证 否则 $I = T^{-1}T\in \mathrm{CL}(X)$,因而 $\bar{B}_1(0) = I\bar{B}_1(0)\subset X$ 是相对紧集,得出矛盾(见 1.5.8). □

2.9.4 为判定线性算子的紧性提供了重要方法,下面看一典型例子.

2.9.6 例 设 $A = (a_{ij})$ 是一无穷矩阵, $\sum\limits_{i,j}|a_{ij}|^2<\infty$,于是 $A\in L(l^2)$

(见 2.2.2)，实际上还有 $A \in \mathrm{CL}(l^2)$.

证 令 $A_n = (a_{ij}^n)$,其中

$$a_{ij}^n = \begin{cases} a_{ij}, & i \leqslant n; \\ 0, & i > n, \end{cases} \quad (j, n \in \mathbf{N})$$

$\forall x = (x_j) \in l^2$,有

$$(A_n x)_i = \begin{cases} \sum_j a_{ij} x_j, & i \leqslant n; \\ 0, & i > n. \end{cases}$$

因此, $\dim R(A_n) \leqslant n$, A_n 是有限秩算子.因

$$\| A_n x - Ax \|_2^2 = \sum_{i>n} \left| \sum_j a_{ij} x_j \right|^2$$
$$\leqslant \sum_{i>n} \sum_j |a_{ij}|^2 \| x \|_2^2,$$

故

$$\| A_n - A \|^2 \leqslant \sum_{i>n} \sum_j |a_{ij}|^2 \to 0 \quad (n \to \infty).$$

于是由 2.9.4(iii) 知 $A \in \mathrm{CL}(l^2)$. □

最后,给出以下重要结果,其证明在下节中.

2.9.7 定理(Schauder) 若 $T \in \mathrm{CL}(X, Y)$,则 $T^* \in \mathrm{CL}(Y^*, X^*)$.

△§2.10 某些结论的证明及补充

2.10.1 引理 设 $T \in L(X, Y)$, X 完备.若 $\exists \delta > 0$,使

$$B_\delta(0) \subset \overline{TB_1(0)}, \tag{1}$$

则必存在 $\eta > 0$,使得

$$B_\eta(0) \subset TB_1(0). \tag{2}$$

证 由(1)不难推出, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: B_\delta(0) \subset \overline{TB_\varepsilon(0)}$.今取 $\varepsilon_n, \delta_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$,使 $\sum \varepsilon_n < 1, \delta_n \to 0, B_{\delta_n}(0) \subset \overline{TB_{\varepsilon_n}(0)}$,令 $\eta = \delta_1$. $\forall y \in B_\eta(0)$,由 $y \in \overline{TB_{\varepsilon_1}(0)}$ 知有 $x_1 \in B_{\varepsilon_1}(0)$,使 $y - Tx_1 \in B_{\delta_2}(0)$;同理有 $x_2 \in B_{\varepsilon_2}(0)$,使

$$y - Tx_1 - Tx_2 \in B_{\delta_3}(0), \cdots,$$

一般地,有 $x_n \in B_{\varepsilon_n}(0)$,使

$$y - \sum_1^n Tx_i \in B_{\delta_{n+1}}(0), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

由

$$\sum_n \| x_n \| < \sum_n \varepsilon_n < 1$$

知 $x = \sum x_n \in B_1(0)$, $y = Tx$,可见(2) 成立. □

2.10.2 定理 设 $T \in L(X,Y)$,X 完备,$R(T)$ 是 Y 中的第二纲集,则 $R(T) = Y$,且 T 是开映射.

注. 显然 2.10.2 蕴涵定理 2.3.1.

证 因 $R(T) = \bigcup_1^\infty nTB_1(0)$ 是第二纲集,故必$(\overline{TB_1(0)})^\circ \neq \varnothing$,从而 $\overline{TB_1(0)}$ 包含一个球 $B_r(a)$,$r > 0$. 于是

$$B_r(0) = B_r(a) - a \subset \overline{TB_1(0)} + \overline{TB_1(0)}$$
$$\subset \overline{T[B_1(0) + B_1(0)]} \subset \overline{TB_2(0)}.$$

令 $\delta = r/2$,可使(1) 成立,从而有 $\eta > 0$ 使(2) 成立. 由(2) 推出

$$Y = \bigcup_1^\infty nB_\eta(0) = \bigcup_1^\infty TB_n(0) = R(T).$$

其次,(2) 推出 $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0: B_\eta(0) \subset TB_\varepsilon(0)$. 若 $U \subset X$ 为开集,$x \in U$,取 $B_\varepsilon(x) \subset U$,则由 $B_\eta(0) \subset TB_\varepsilon(0)$ 有

$$B_\eta(Tx) = Tx + B_\eta(0) \subset Tx + TB_\varepsilon(0)$$
$$= T[x + B_\varepsilon(0)] = TB_\varepsilon(x) \subset TU,$$

可见 $Tx \in (TU)^\circ$. 这表明 TU 是开集,T 是开映射得证. □

2.4.5 之证 只考虑 $\Omega = J = [a,b]$($a < b$)这一特殊情况(一般情况的证明要用到较多的测度论知识,可参看[1] 或[9]),且设 $1 < p < \infty$($p = 1$ 时的证明是类似的). 定义 $\varphi: L^p(J) \times L^q(J) \to \mathbf{K}$ 为

$$\varphi(u,v) = \int_a^b u(x)v(x)\mathrm{d}x,$$

则 φ 显然满足 2.4.2 中条件(i) ~ (iii). 任取 $f \in L^p(J)^*$. 定义

$$w(x) = f(u_x), u_x = \chi_{[a,x]} \quad (x \in J). \tag{3}$$

若$\{[\alpha_i,\beta_i]\}$ 是$[a,b]$ 的有限个互不相交的子区间,则

$$\sum_i |w(\beta_i) - w(\alpha_i)| = \sum_i \left|\varepsilon_i f(u_{\beta_i} - u_{\alpha_i})\right| (|\varepsilon_i| = 1)$$
$$= f\Big(\sum_i \varepsilon_i (u_{\beta_i} - u_{\alpha_i})\Big)$$
$$\leqslant \|f\| \Big\|\sum_i \varepsilon_i (u_{\beta_i} - u_{\alpha_i})\Big\|_p$$
$$= \|f\| \Big(\sum_i (\beta_i - \alpha_i)\Big)^{1/p},$$

由此看出 w 在J 上绝对连续,因而 $v \triangleq w' \in L^1(J)$. 于是

$$f(u_x) = w(x) = \int_a^x v(y)\mathrm{d}y$$
$$= \int_a^b u_x(y)v(y)\mathrm{d}y.$$

这又推出，对 J 上的阶梯函数 u，有

$$f(u)=\int_a^b u(x)v(x)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

进而用一标准的逼近程序得出，(4) 亦适用于有界可测函数 u.

$\forall n\in\mathbf{N}$，定义

$$v_n(x)=\begin{cases}v(x), & |v(x)|\leqslant n;\\ 0, & |v(x)|>n,\end{cases}$$

则 $v_n\to v$，a.e.. 由

$$\begin{aligned}\|v_n\|_q^q&=\int_a^b|v_n|^{q-1}(\operatorname{sgn}v_n)v\mathrm{d}x\\&=f(|v_n|^{q-1}(\operatorname{sgn}v_n))\qquad(\text{用}(4))\\&\leqslant\|f\|\,\||v_n|^{q-1}\operatorname{sgn}v_n\|_p\\&=\|f\|\,\|v_n\|_q^{q/p}\end{aligned}$$

推出 $\|v_n\|_q\leqslant\|f\|$，因此

$$\|v\|_q=\lim_n\|v_n\|_q\leqslant\|f\|,\quad v\in L^q(J).$$

任给 $u\in L^p(J)$，取 J 上的阶梯函数列 $\{u_n\}$，使 $u_n\xrightarrow{L^p}u$（参考[13, *Th*.4.2.3]），则

$$\left|\int_a^b u_n(x)v(x)\mathrm{d}x-\int_a^b u(x)v(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant\|u_n-u\|_p\|v\|_q\to0(n\to\infty),$$

这推出

$$\begin{aligned}f(u)&=\lim_n f(u_n)\\&=\int_a^b u(x)v(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这就验证了 φ 满足 2.4.2 中条件(iv)，因而可由 2.4.2 推出 2.4.5.　□

2.4.7 之证　定义 $\varphi: C(J)\times\mathrm{BV}_0(J)\to\mathbf{K}$ 为

$$\varphi(u,v)=\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x),$$

则易见 φ 满足 2.4.2 中条件(i)(ii). 任取 $f\in C(J)^*$，由 2.5.2，可设 f 已保持范数扩张到 $L^\infty(J)$ 上. 定义 $w(x)$ 如(3). 若

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,\quad \Delta w(x_i)=w(x_i)-w(x_{i-1}),$$

则类似于 2.4.5 之证，有

$$\sum_{i=1}^n|\Delta w(x_i)|=\sum_{i=1}^n\varepsilon_i f(u_{x_i}-u_{x_{i-1}})\qquad(|\varepsilon_i|=1)$$

$$\leqslant \|f\| \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (u_{x_i} - u_{x_{i-1}}) \right\|_\infty = \|f\|,$$

这表明 $V_a^b(w) \leqslant \|f\|$. $\forall u \in C(J), \varepsilon > 0$,取 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$,使

$$\left| \sum_{i=1}^{n} u(x_i)\Delta w(x_i) - \int_a^b u(x)\mathrm{d}w(x) \right| < \varepsilon,$$

且 $\|u - \bar{u}\|_\infty < \varepsilon, \bar{u} = \sum_{i=1}^{n} u(x_i)(u_{x_i} - u_{x_{i-1}})$. 于是

$$\begin{aligned} &\left| f(u) - \int_a^b u(x)\mathrm{d}w(x) \right| \\ \leqslant &| f(u) - f(\bar{u}) | + \left| f(\bar{u}) - \int_a^b u(x)\mathrm{d}w(x) \right| \\ < &\|f\| \varepsilon + \varepsilon, \end{aligned}$$

这表明

$$f(u) = \int_a^b u(x)\mathrm{d}w(x).$$

因可指明,存在 $v \in \mathrm{BV}_0(J)$,使得 $V_a^b(v) \leqslant V_a^b(w)$,

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x) = \int_a^b u(x)\mathrm{d}w(x) \quad (\forall u \in C(J))$$

(这一事实的证明需要某些技术性细节,从略),故知 φ 满足 2.4.2 之条件(iv).

若 $v \in \mathrm{BV}_0(J)$,对任给 $u \in C(J)$ 有 $\varphi(u, v) = 0$,则特别对

$$u(x) = \int_x^b \overline{v(y)}\mathrm{d}y$$

有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x) \\ &= \int_a^b |v(x)|^2 \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

这推出 $v(x) = 0$,a.e.;由 $v(a) = 0$ 及 $v(x)$ 在 (a, b) 内右连续推出 $v(x) \equiv 0$. 这就验证了 2.4.2 之条件(iii). 于是 2.4.7 得证. □

为证 2.5.1,需准备某些集论概念.

2.10.3 定义　设 M 是任一非空集. 若 M 上的二元关系 $\leqslant$ 满足条件:

(i) 自反性: $x \leqslant x$;

(ii) 可传性: $x \leqslant y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$;

(iii) 反对称性: $x \leqslant y \leqslant x \Rightarrow x = y$

(以上 $x, y, z \in M$),则称 $\leqslant$ 为 M 上的**半序**,称 $(M, \leqslant)$ 为**半序集**. 若 A 是半序集 M 的子集, $\forall a, b \in A$, $a \leqslant b$ 与 $b \leqslant a$ 必居其一,则称 A 为**链**. 若 $b \in M$ 满

足 $x\leqslant b(\forall x\in A)$,则称 b 为A 的上界.若 $m\in M$,当 $m\leqslant x$ 时必$m=x$,则称 m 为M 的**极大元**.

2.10.4 极大原理 若半序集 M 中每个链有上界,则 M 必有极大元.

极大原理又称 **Zorn** 引理,它被作为一条集论公理接受.

2.5.1 之证 以 M 表如下的v 之全体:v 是某个子空间$B\subset X$ 上的线性泛函,$A\subset B$,$v\mid A=u$,在 B 上$v\leqslant p$.若 $v,w\in M$,w 是v 的延拓,则记作 $v\subset w$.显然"$\subset$"是 M 上的半序.若 N 是M 中的一个链,以 D_v 记v 的定义域,令 $D=\bigcup_{v\in N}D_v$,定义

$$w(x)=v(x),\quad x\in D_v,v\in N,$$

则易见 w 是N 的上界.由 2.10.4,M 有极大元v,设 $D=D_v$.

今证 $D=X$(如此则显然2.5.1得证).若$D\neq X$,则有 $x_0\in X\setminus D$.令$B=D\oplus\mathbf{R}x_0$.$\forall x,y\in D$,有

$$\begin{aligned}v(x)+v(y)&=v(x+x_0+y-x_0)\\&\leqslant p(x+x_0)+p(y-x_0),\end{aligned}$$

即

$$v(y)-p(y-x_0)\leqslant p(x+x_0)-v(x).$$

于是有 $r\in\mathbf{R}$,使

$$v(y)-p(y-x_0)\leqslant r\leqslant p(x+x_0)-v(x)(x,y\in D).\tag{5}$$

定义 B 上的线性泛函w:

$$w(x+\lambda x_0)=v(x)+\lambda r\quad(x\in D,\lambda\in\mathbf{R}).$$

显然 $w\mid D=v$,从而 $w\mid A=u$.若 $\lambda>0$,则用(5)得

$$\begin{aligned}w(x+\lambda x_0)&\leqslant v(x)+\lambda\left[p\left(\frac{x}{\lambda}+x_0\right)-v\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right]\\&=p(x+\lambda x_0).\end{aligned}$$

同理,当 $\lambda<0$ 时亦可用(5)得 $w(x+\lambda x_0)\leqslant p(x+\lambda x_0)$.因此 $w\in M$,且 $v\subset w$.但$v\neq w$,这与 v 是极大元相矛盾.故必 $D=X$. □

2.6.3 之证 首先注意,§2.6 中不等式(5) 相当于 $u(A^\circ-B)>0$.由 2.6.2(ii)~(iv) 知 $A^\circ-B$ 为凸集;由

$$A^\circ-B=\bigcup_{b\in B}(A^\circ-b)$$

知 $A^\circ-B$ 为开集(用1.3.5).取 $x_0\in B-A^\circ$,令 $V=A^\circ-B+x_0$,则 V 为凸开集,$0\in V$,$x_0\overline{\in}V$(否则 $0\in A^\circ-B$,与 $A^\circ\cap B=\varnothing$ 相矛盾).定义所谓 **Minkowski 函数**

$$p(x)=\inf\{\lambda>0:x\in\lambda V\}.$$

设 $\alpha>0,x,y\in X$,则

$$p(\alpha x)=\inf\{\lambda>0:\alpha x\in\lambda V\}$$
$$=\alpha\cdot\inf\left\{\frac{\lambda}{\alpha}>0:x\in\frac{\lambda}{\alpha}V\right\}=\alpha p(x);$$
$$p(x+y)=\inf\{\lambda>0:x+y\in\lambda V\}$$
$$\leqslant\inf\{\lambda>0:x\in\lambda V\}+\inf\{\mu>0:y\in\mu V\}$$
$$=p(x)+p(y),$$

可见 $p(x)$ 是 X 上的次线性泛函. 由 $x_0\in V$ 得 $p(x_0)\geqslant 1$; 由 V 为开集推出 $p(V)<1$, 即 $\forall x\in V: p(x)<1$.

在 X 的子空间 $\mathbf{R}x_0$ 上定义一个线性泛函

$$u:\mathbf{R}x_0\to\mathbf{R},\lambda x_0\to\lambda. \tag{6}$$

若 $\lambda>0$, 则

$$p(\lambda x_0)=\lambda p(x_0)\geqslant\lambda=u(\lambda x_0);$$

若 $\lambda\leqslant 0$, 则 $p(\lambda x_0)\geqslant 0\geqslant u(\lambda x_0)$. 因此在 $\mathbf{R}x_0$ 上 $u(x)\leqslant p(x)$. 于是由 Hahn-Banach 定理(2.5.1), u 可扩张为 X 上的线性泛函, 仍记作 u, 使得

$$u(x)\leqslant p(x)\quad(\forall x\in X).$$

今验证 u 合于定理所求. 由 $p(V)<1$ 得 $u(V)<1$, 因而 $u(-V)>-1$, 于是在 $V\cap(-V)$ 上 $|u(x)|<1$. 因 $V\cap(-V)$ 是 0 的开邻域, 故 $u\in X^*$ (参考本章题 1). 其次, 由(6) 有 $u(x_0)=1$, 于是

$$1>u(V)=u(A^\circ-B+x_0)=u(A^\circ)-u(B)+1,$$

由此得 $u(A^\circ)<u(B)$. 令 $r=\inf\limits_{b\in B}u(b)$, 注意到 $u(A^\circ)$ 为开区间(参看 2.6.2(vi)), 即得 §2.6(5). 由 §2.6(5) 与 $A\subset\overline{A^\circ}$(2.6.2(v)) 推出 §2.6(6). □

2.10.5 定理 设 A 是自反空间 X 的闭子空间, 则 A 亦为自反空间.

证 任给 $\varphi\in A^{**}$, 定义 X^* 上的线性泛函如下:

$$\psi:X^*\to\mathbf{K},v\to\langle\varphi,v\mid A\rangle.$$

由

$$|\langle\varphi,v\mid A\rangle|\leqslant\|\varphi\|\,\|v\|$$

知 $\psi\in X^{**}$. 因 X 是自反空间, 故有 $x_0\in X$, 使

$$\langle\psi,v\rangle=\langle\varphi,v\mid A\rangle=v(x_0). \tag{7}$$

若 $x_0\,\overline{\in}\,A$, 则由 2.5.3 有 $v\in A^\perp$, 使 $v(x_0)\neq 0$, 而 $\langle\varphi,v\mid A\rangle=0$, 这与(7)矛盾. 因此 $x_0\in A$. $\forall u\in A^*$, 由 Hahn-Banach 定理有 $v\in X^*$, 使 $v\mid A=u$, 因而由(7) 有 $u(x_0)=\langle\varphi,u\rangle$. 这表明 A 依正则嵌入同构于 A^{**}, 因此 A 是自反空间. □

2.10.6 定理 若 X^* 可分, 则 X 亦可分.

证 取 X^* 中单位球面上的可数稠集 $\{u_n\}$；取 $x_n \in X$，使 $\|x_n\| = 1$，$|u_n(x_n)| > 1/2 (n = 1,2,\cdots)$。今证 $\{x_n\}$ 是 X 的基本集，从而 X 可分(参考1.3.7)。若结论不真，则由 2.5.7 有 $0 \neq u \in \{x_n\}^{\perp}$，可设 $\|u\| = 1$。于是

$$\begin{aligned}\|u_n - u\| &\geqslant |u_n(x_n) - u(x_n)| \\ &= |u_n(x_n)| > 1/2 \quad (n = 1,2,\cdots),\end{aligned}$$

这与对 $\{u_n\}$ 的稠密性假设相矛盾. □

2.10.7 定理 若 X 可分，则每个有界序列 $\{u_n\} \subset X^*$ 有弱 * 收敛子列.

证 取 X 的可数稠集 $\{x_k\}$. 如同 1.5.9 之证(见 §1.9)，用取"对角线序列"的方法可得 $\{u_n\}$ 的一子列 $\{v_n\}$，使得 $\forall k \in \mathbf{N}$，$\{v_n(x_k)\}$ 收敛. $\forall x \in X$，$\forall \varepsilon > 0$，取 x_k，使 $\|x_k - x\| < \varepsilon$；再取 $N > 0$，使当 $m, n \geqslant N$ 时 $|v_m(x_k) - v_n(x_k)| < \varepsilon$. 令 $\beta = \sup_n \|u_n\|$. 则当 $m, n \geqslant N$ 时，

$$\begin{aligned}|v_m(x) - v_n(x)| &\leqslant |v_m(x) - v_m(x_k)| + |v_m(x_k) - v_n(x_k)| \\ &\quad + |v_n(x_k) - v_n(x)| \\ &< (\|v_m\| + \|v_n\|)\|x - x_k\| + \varepsilon \\ &< \varepsilon(2\beta + 1),\end{aligned}$$

可见 $\{v_n(x)\}$ 收敛. 设 $v_n(x) \to v(x) (n \to \infty, x \in X)$，则 $v \in X^*$，$v_n \xrightarrow{*} v$. □

2.7.8 之证 任给有界序列 $\{x_n\} \subset X$，令 $A = \overline{\operatorname{span}\{x_n\}}$，则 A 是 X 的可分闭子空间. 由 2.10.5，A 是自反空间；由 2.10.6，A^* 亦可分. 由 2.10.7，$\{x_n\}$ 有子列 $\{x_{n_k}\}$ 在 $A^{**}(= A)$ 中弱 * 收敛，即 $\forall u \in A^*$，有 $u(x_{n_k}) \to u(x) (k \to \infty)$. $\forall v \in X^*$，有 $v \mid A \in A^*$，故亦有 $v(x_{n_k}) \to v(x) (k \to \infty)$，因此 $x_{n_k} \rightharpoonup x$. □

2.10.8 命题 若 $T \in \mathrm{CL}(X, Y)$，则 $R(T)$ 可分.

证 不妨设 $R(T) = Y$. 因 $Y = \bigcup_1^\infty nTB_1(0)$，只需证 $TB_1(0)$ 有可数稠集. 因 $TB_1(0)$ 相对紧，从而全有界，故 $\forall k \in \mathbf{N}$，存在有限集 $\{y_{ki} : 1 \leqslant i \leqslant n_k\} \subset Y$，使得 $TB_1(0) \subset \bigcup_i B_{1/k}(y_{ki})$. 显然 $\{y_{ki} : 1 \leqslant i \leqslant n_k, k = 1,2,\cdots\}$ 在 $TB_1(0)$ 中稠密. □

2.9.7 之证 任给有界序列 $\{v_n\} \subset Y^*$，今证 $\{T^* v_n\}$ 有收敛子列. 由 2.10.8，$R(T)$ 可分，从而 $\overline{R(T)} \triangleq B$ 亦可分. 由 2.10.7，有 $\{v_n\}$ 的子列 $\{u_n\}$ 及 $u \in B^*$，使得 $\forall y \in B$，有 $u_n(y) \to u(y) (n \to \infty)$. 由 Hahn-Banach 定理，可设 $u \in Y^*$. 今指明 $T^* u_n \to T^* u$. 若此结论不真，则有 $\varepsilon > 0$ 与 $\{u_n\}$ 的子列 $\{u_{n_k}\}$，使得

$$\|T^* u_{n_k} - T^* u\| \geqslant \varepsilon, \quad k = 1,2,\cdots.$$

取 $x_k \in X$，使 $\|x_k\| = 1$，$|\langle u_{n_k} - u, Tx_k\rangle| \geqslant \varepsilon/2$，$k = 1,2,\cdots$. 由 T 的紧性，不妨设 $Tx_k \to y \in B (k \to \infty)$. 于是

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{2} &\leqslant \left|\langle u_{n_k} - u, Tx_k\rangle\right| \\ &\leqslant \left|\langle u_{n_k} - u, Tx_k - y\rangle\right| + \left|\langle u_{n_k} - u, y\rangle\right| \\ &\leqslant \text{const}\,\|Tx_k - y\| + \left|u_{n_k}(y) - u(y)\right| \to 0 \quad (k \to \infty),\end{aligned}$$

得出矛盾. □

线性算子概念的一个自然推广是双线性算子,以及更一般的多重线性算子.后者虽然远不及线性算子那样被广泛使用,但也自然地出现于不少数学问题中.本书并不深入涉及双线性算子概念,只是给出初步的定义.

2.10.9 定义　设 $T: X \times Y \to Z$.若 $T(x,y)$ 分别对 x,y 是线性的,则称 T 为**双线性算子**.若进而设

$$\|T\| \triangleq \sup_{x,y\neq 0} \frac{\|T(x,y)\|}{\|x\|\,\|y\|} < \infty,$$

则称 T 为**有界双线性算子**,且称 $\|T\|$ 为 T 的算子范数.

§2.1 中许多结果都可平行推广于有界双线性算子.例如,若 $T: X \times Y \to Z$ 是有界双线性算子,则

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{\|x\|,\|y\|\leqslant 1} \|T(x,y)\| \\ &= \sup_{\|x\| = \|y\| = 1} \|T(x,y)\| \\ &= \min\{k \geqslant 0 : \|T(x,y)\| \\ &\leqslant k\|x\|\,\|y\|\,(\forall x \in X, y \in Y)\};\end{aligned}$$

$$\|T(x,y)\| \leqslant \|T\|\,\|x\|\,\|y\|.$$

双线性算子 $T: X \times Y \to Z$ 有界 $\Leftrightarrow T$ 连续.从 $X \times Y$ 到 Z 的有界双线性算子之全体依算子范数是一个赋范空间,记作 $L(X,Y;Z)$;当 Z 完备时 $L(X,Y;Z)$ 亦完备.特别,$L(X,Y;\mathbf{K})$ 是一个 Banach 空间.任何 $f \in L(X,Y;\mathbf{K})$ 称为 $X \times Y$ 上的有界双线性泛函.

以上所述可进一步推广到多重线性算子,不必细述.

评　注

1. 线性算子　如同任何抽象数学理论一样,线性算子理论有一个很长的演进过程.早在没有任何线性算子概念之前,人们就已经实际使用线性算子了.实际上,任何"线性的"运算或变换都是线性算子,这样的算子出现于数学的各个领域,包括最初等的数学部门.熟知的代数规则

$$a(\lambda x + \mu y) = \lambda(ax) + \mu(ay) \quad (a,\lambda,\mu,x,y \in \mathbf{R})$$

无非表示对应 $x \to ax$ 是 $\mathbf{R}$ 上的线性算子.更重要的线性算子出现在微积分学中.

显然,映射

$$u(x) \to u'(x) \quad 与 \quad u(x) \to \int_a^x u(y)\mathrm{d}y$$

都是定义在适当空间上的线性算子,它们只是微分算子与积分算子的最简单特例.更复杂的微分算子在微分方程论中被广泛使用,例如,

$$L: u(x) \to \sum_{i=0}^{n} a_i(x) u^{(i)}(x)$$

可作为这类算子的一个例子.线性算子的其他例子还可举出:求 C^n 函数的 n 阶 Taylor 多项式;Fourier 变换及其逆变换,等等.

第一个试图建立一个关于线性算子与线性泛函的一般理论的人,是美国数学家 Moore,他在 1906 年运用公理化方法建立了他的"General Analysis".但 Moore 的工作实质性结果很少,影响有限.真正为线性算子理论的形成作出了开创性贡献的是 Riesz,他在 1910 年前后的工作为这一领域奠定了基础.与 Riesz 同时及稍后的线性算子理论开拓者中,可指出 Hilbert,Schmidt,Hahn,Banach 等,尤其是 Banach,他对于 Banach 空间中线性算子理论贡献之大,只要看看以他命名的定理之多就够了.

2. 算子范数　对于 $T \in L(X,Y)$,范数 $\|T\|$ 无非是实泛函 $\|Tx\|$ 在闭单位球上的上确界,在某些特殊情况下(例如 $\dim X < \infty$,但不限于这种情况),该上确界实际上是极大值.无论迫于实际的需要,或者基于追求理论上完整性的偏好,人们常常致力于准确地求出所研究的线性算子的范数,但这未必容易成功.读者在面对这类问题时,通常有两种方法可供选择:

(A) 利用已知的标准结果,例如本章的 2.1.3,2.2.1 ~ 2.2.4,以及下章的 3.5.7(i),3.6.2 等.这类结果在泛函分析中为数不多,其作用是有限的.

(B) 直接法.通常依如下程序进行:$\forall x \in X$,对 $\|Tx\|$ 作出一个尽可能准确的估计 $\|Tx\| \leqslant k\|x\|$,从而推测 $\|T\| = k$.为证实这一推测,可用以下方法之一:

(i) 选取适当的 $x_0 \in X$,使 $\|x_0\| = 1$,$\|Tx_0\| = k$,如在 2.1.3 与 2.7.7 中即是如此.这一方法显然仅当 $\|T\| = \max\limits_{\|x\|=1}\|Tx\|$ 时才有效,因此应用极有限.

(ii) $\forall \alpha < k$,选取 $x_\alpha \in X$,使 $\|x_\alpha\| = 1$,$\|Tx_\alpha\| \geqslant \alpha$,如在命题 2.2.2 之证中所作的.

(iii) 选取 $x_n \in X$,使 $\|x_n\| = 1$,$\overline{\lim\limits_n}\|Tx_n\| \geqslant k$.2.2.4 之证即用此法.

毫无疑问,以上方法成功的前提是 $\|T\| = k$ 是一正确猜测,而这是无法保证的.如本章曾指出的,不能准确地求出 $\|T\|$,未必总是一个很严重的问题.例如,对于 2.2.2(iii) 中所述的算子 $A \in L(l^p)$,尽管未曾求得 $\|A\|_p$ 的准确表达

式,但这并不妨碍我们有效地运用算子 A.

3. 积分算子　在线性算子理论的形成及其应用中,微分算子与积分算子都起了重要作用.然而二者的性质差别甚大:积分算子可以定义在由"很坏"的函数构成的空间上(例如 L^p),而微分算子通常只有狭小得多的定义域;积分算子通常是有界算子,甚至是紧算子,而微分算子则往往是无界算子;积分算子与由矩阵表示的线性算子有高度的类似性,而微分算子则远非如此.正是由于这些差别,积分算子更早被研究并形成较成熟的理论.

积分算子的研究历史,在很大程度上也就是泛函分析的早期发展史.泛函分析的基本思想与理论框架的形成,密切联系于积分方程

$$u(x)-\int_a^b K(x,y)u(y)\mathrm{d}y=v(x)$$

的研究,而后者依赖于对以 K 为核的积分算子的考察.泛函分析的开创者,如 Hilbert,Schmidt,Riesz 等人,都热衷于对上述积分算子的研究.他们在其研究中大量运用线性代数的观念与方法.正是在无限维空间中拓广线性代数结论的诱人前景,大大激发了开拓者们的热情.当时人们刻意模仿线性代数的方法,以至大量线性代数术语直接出现于泛函分析的早期理论中.1900 年前后,Fredholm 通过直接解线性代数方程组建立了他的著名的积分方程理论.Hilbert 则借助于正交坐标系直接将积分方程转化为无穷线性方程组(1906).这些研究为泛函分析的形成提供了丰富的材料;但对线性代数方法的过分依赖,实际上延缓了抽象化的算子理论的形成.现代线性算子理论无疑大量吸收了线性代数的思想,但在构建理论的具体方法上,却舍弃了传统线性代数方法这一拐杖.

4. 基本定理　逆算子定理、一致有界原理及 Hahn-Banach 定理等基本定理,大致确立于 1920 ~ 1930 年间,显著后于 Hilbert,Riesz 等人的更早的开拓性工作.但正是基本定理的出现,标志着泛函分析开始成熟.值得注意的是,三大定理都与 Banach 的名字联系在一起,Banach 的贡献是不容置疑的.然而,在 Banach 之前很久,与基本定理有关的某些事实与结论就已被许多分析学家注意到.一致有界原理或共鸣定理的形成最能说明问题.在 Banach 以前,这一定理的一系列特殊情况在各个不同领域被陆续发现,其中包括 Fourier 级数的发散性(Lebesgue,1909);Lagrange 插值多项式序列的发散性(Hahn,1918);发散级数求和法(Schur,1920;Hahn,1922);求积公式的收敛性(Polya),等等.人们只是后来才逐渐意识到,这一系列特殊发现实际上可统一为某个一般定理,而这一定理终于由 Banach 与 Steinhaus 于 1927 年建立起来.

在三大定理中,Hahn-Banach 定理明显地处于特殊地位.与基于 Baire 纲定理的逆算子定理、一致有界原理不同,Hahn-Banach 定理不用到空间的完备性;实际上,它并不真正依赖于空间的拓扑结构,可看作一条纯代数的定理.正因为如此,

Hahn-Banach 定理能推广到更一般的空间，如局部凸空间中，而逆算子定理与一致有界原理推广的余地是很小的.

5. 对偶空间　对偶空间概念是由 Banach 于 1927 年引入的. 本章的材料已经显示出，对偶空间并非只是一种抽象构架，而是一个不可缺少的有效工具. 例如，倘不用对偶空间，就无法定义弱收敛、对偶算子等如此有用的概念. 对偶空间的运用可区分为如下两种类型：

(A) 一般的使用，仅用对偶空间的普遍性质. 本章所有涉及对偶空间的一般性命题(2.5.4，2.5.9 等是典型例子)，都是在这种意义上运用对偶空间. 这些命题并不用到对偶空间 X^* 的特殊构成或其具体实现.

(B) 特殊的使用，例如，给出某一赋范空间 X 中弱收敛的条件，这就要用到 X^* 的特殊构成或其具体实现. 2.7.3 ~ 2.7.6 即属这一类型. 对于这一类的应用，对偶空间的具体构造不明必然是一重大障碍. 例如，在 $C(J)$ 中，

$$u_n \rightharpoonup u \Leftrightarrow \sup_n \| u_n \|_0 < \infty \quad 且 \quad u_n(x) \to u(x)(n \to \infty, \forall x \in J).$$

(参看题 82)，如果不利用给出 $C(J)^*$ 具体实现的命题 2.4.7，就难以达到上述结论.

由此可见，对偶空间的具体实现虽然不是处处需要的，但显然是非常重要的. 正因为如此，人们才不遗余力地去建立尽可能多的**表示定理**. 而且，一些重要表示定理的建立(关于 Hilbert 空间的 Riesz 表示定理 2.4.3 与关于空间 $C(J)$ 的 2.4.7 是其典型)，一直被视为分析学的重大成果.

对偶空间概念在现代数学中被广泛拓广为各种数学系统的对偶概念. 常见的例子可以举出：Abel 群的对偶群，交换 Banach 代数的结构空间([9，§4.5])，等等.

6. 正则嵌入　定理 2.5.8 指出了 $X \subset X^{**}$，即每个 $x \in X$ 具有双重身份：X 中的点；X^* 上的有界线性泛函. 当在后一意义上使用时记作 $\tilde{x}$. 这种观点的实际好处已体现于本章中若干具体结果的建立(如 2.5.9 与 2.8.3)，理论上的好处则尚需进一步的说明. 以 B 记 X^* 中的闭单位球. 可以严格证明，B 依弱* 收敛所导入的拓扑(称为弱* 拓扑)是一紧集(称为弱* 紧集). 以 $C(B)$ 记 B 上依弱* 拓扑连续的泛函之全体，则 $C(B)$ 依 sup 范数是一 Banach 空间. 任给 $x \in X$，若在 B 中 $u_n \xrightarrow{*} u$，则 $u_n(x) \to u(x)$(参看 2.7.1)，即 $\tilde{x}(u_n) \to \tilde{x}(u)$，可见 $\tilde{x}$ 依弱* 拓扑在 B 上连续，因此 $\tilde{x} \mid B \in C(B)$. 由 §2.5(10)，有

$$\| x \| = \sup_{u \in B} | \tilde{x}(u) |,$$

上式右端正是 $\tilde{x}$ 作为 $C(B)$ 中元素的 sup 范数. 这就得到等距嵌入

$$X \to C(B), \quad x \to \tilde{x} \mid B;$$

简言之，X 是连续函数空间 $C(B)$ 的子空间. 这就给出抽象的赋范空间 X 的一个具体实现. 有趣的是，这种具体实现是依靠 X 自己的对偶空间获得的.

这样,我们达到了一个颇为惊人的结论:

只有一种赋范空间,即紧集上的连续函数空间.

习题 A

1. 线性算子 $T: X \to Y$ 连续 $\Leftrightarrow T$ 映某个内部非空的集为有界集.

2. 设 $T: X \to Y$ 为线性算子,则 $\| T \| \leqslant k \Leftrightarrow TB_1(0) \subset B_k(0)$.

3. 设 $T \in L(X, Y)$,则 $\forall \beta > 1, \exists x \in X$: $\| x \| < \beta, \| Tx \| = \| T \|$.

4. 设 $(Tu)(x) = xu(x)$, $(Su)(x) = x\int_0^1 u(y)\mathrm{d}y, u \in C[0,1]$, 求 $\| T \|$, $\| S \|$, $\| TS \|$, $\| ST \|$.

5. 设 $x \in X, \varphi(T) = Tx(T \in L(X))$,则 $\varphi \in L(L(X), X)$,求 $\| \varphi \|$.

6. 设 $a \in L^\infty(J), (Tu)(x) = a(x)u(x)$,则 $T \in L(L^2(J))$,求 $\| T \|$.

7. 设 $v = Tu, v(x) = u(x)(x < 1/2), v(x) = 0(x > 1/2)$,则 $T \in L(L^2[0,1])$,求 $\| T \|$.

8. 设 $a = (a_i), Tx = (a_i x_i)$,则 $T \in L(l^2) \Leftrightarrow a \in l^\infty$;当 $a \in l^\infty$ 时,求 $\| T \|$.

9. 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbf{K}^{n \times n}$,当 $i > n$ 或 $j > n$ 时补充定义 $a_{ij} = 0$,将 A 扩充为无穷矩阵 $\tilde{A}$,则 $\| A \|_p = \| \tilde{A} \|_p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

10. 设 $T_n x = (x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots)$,则 $T \in L(l^2)$,求 $\| T_n \|$.

11. 设 $Tu(x) = \int_0^1 \sin\pi(x - y)u(y)\mathrm{d}y$,则 $T \in L(C[0,1])$,求 $\| T \|$.

12. 设 $J = [a, b], Tu(x) = \int_a^x u(t)\mathrm{d}t$,则 $T \in L(L^1(J), C(J))$ 且 $T \in L(L^1(J))$,分别求 $\| T \|$.

13. 设 $K(\cdot, \cdot) \in L^q(J \times J), 1 < p < \infty, p^{-1} + q^{-1} = 1$, T 是以 K 为核的积分算子,则 $T \in L(L^p(J), L^q(J))$.

14. 设 $(X, \| \cdot \|)$ 与 $(X, \| \cdot \|')$ 皆为Banach空间, $\beta > 0, \| x \|' \leqslant \beta \| x \| (\forall x \in X)$,则两范数 $\| \cdot \|$ 与 $\| \cdot \|'$ 等价.

15. 设 X, Y 是 Banach 空间, $T \in L(X, Y), R(T)$ 是闭集; $S \in L(X, Z), N(T) \subset N(S)$.定义 $A: R(T) \to Z, Tx \to Sx$,则 $A \in L(R(T), Z)$.

16. 设 X 是 Banach 空间, $X = A \oplus B$, A, B 是闭子空间,则 $\exists k > 0, \forall x \in X$,当 $x = a + b(a \in A, b \in B)$ 时 $\| a \| \leqslant k \| x \|, \| b \| \leqslant k \| x \|$.

17. 设 X, Y 是 Banach 空间,则 $X \times Y$ 亦是.

18. 设 $T \in L(L^2(J)), TC(J) \subset C(J)$,则 $T \in L(C(J))$.

19. 设 u 是 X 上的线性泛函.则 u 有界 $\Leftrightarrow N(u)$ 是闭子空间; u 无界 $\Leftrightarrow \overline{N(u)} = X$.

20. 设 $0 \neq u \in X^*$,则 $d(x, N(u)) = |u(x)| / \| u \|$;若 $A = X(u = 1)$,则 $\| u \| = 1/d(0, A)$.

21. 设 $0 \neq u \in X^*$,则不存在球 $B_r(a)$,使 $u(a)$ 是 u 在 $B_r(a)$ 上的最大或最小值.

22. 设 $f(u) = \int_0^1 u(x^\alpha)\mathrm{d}x, u \in L^2[0,1], 0 < \alpha < 2$,则 $f \in L^2[0,1]^*$,求 $\| f \|$.

23. 设 $f(u) = \alpha u(1/3) + \beta u(2/3)$,则 $f \in C[0,1]^*$,求 $\| f \|$.

24. 设 f 是 $C(J,\mathbf{R})$ 上的线性泛函,$u \geqslant 0 \Rightarrow f(u) \geqslant 0$,则 $f \in C(J)^*$.

25. $c_0^* = l^1$.

26. 设 p 是实向量空间 X 上的次线性泛函,$p(0) = 0$,则存在 X 上的线性泛函 u,使得

$$-p(-x) \leqslant u(x) \leqslant p(x).$$

27. 设 $A \subset X$ 是闭子空间,则 $d(x,A) = \sup\{|u(x)|/\| u \| : 0 \neq u \in A^{\perp}\}$.

28. 设 A 是 Hilbert 空间 X 的子空间,u 是 A 上的有界线性泛函,则 u 在 X 上有唯一保范延拓.

29. $A^{\perp}$, ${}^{\perp}U$ 是闭子空间;$A^{\perp} = \overline{\mathrm{span} A}^{\perp}$.

30. 关于向量值函数 $x(t)$ 的分部积分公式成立.

31. 设 $\{T_n\} \subset L(X,Y)$,X 完备,$\forall x \in X, \forall v \in Y^*: \sup\limits_n |v(T_n x)| < \infty$,则

$$\sup_n \| T_n \| < \infty.$$

32. 设 $T: X \to Y$ 是线性算子,$\forall v \in Y^*: v \circ T \in X^*$,则 T 有界.

33. 设 $K \subset X$ 是闭凸锥且 $K^\circ \neq \varnothing$,则 $x \in K^\circ \Leftrightarrow$ 当 $0 \neq u \in K^*$ 时 $u(x) > 0$.

34. 若 X 是自反空间,$K \subset X$ 是闭凸锥,则 $K = K^{**}$.

35. 证明 2.6.2(i) ~ (iv).

36. 在 Hilbert 空间中 $x_n \to x \Leftrightarrow x_n \rightharpoonup x$ 且 $\| x_n \| \to \| x \|$.

37. 弱收敛的极限有唯一性.

38. 若 $x_n \rightharpoonup x, u_n \to u$ 或 $x_n \to x, u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$,$X$ 完备,则 $u_n(x_n) \to u(x)$.

39. 若 $T \in L(X,Y), x_n \rightharpoonup x$,则 $Tx_n \rightharpoonup Tx$.

40. 若 $T: X \to Y$ 是线性算子,$x_n \to x \Rightarrow Tx_n \rightharpoonup Tx$,则 T 有界.

41. 闭子空间对序列弱收敛封闭.

42. 在 l^1 中 $x^{(n)} \to x \Leftrightarrow x^{(n)} \rightharpoonup x$(Schur,1921).

43. 设 $f_n(u) = \int_a^b u(x) \sin nx \mathrm{d}x, u \in L^p[a,b], 1 \leqslant p < \infty$,则 $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$.

44. 设 X 自反,$D \subset X$ 是非空闭凸集.则 $\exists x_0 \in D$,使 $\| x_0 \| = \inf\limits_{x \in D} \| x \|$;当 D 有界时每个 $f \in X^*$ 在 D 上取得最大值与最小值.

45. 设 $T_n \in L(Y,Z), S_n \in L(X,Y)$,$Y$ 完备,$\{T_n\}$ 强收敛于 T,$\{S_n\}$ 强收敛于 S,则 $T_n S_n$ 强收敛于 TS.

46. 设 $(T_n u)(x) = u(x\sqrt[n]{x})$,则 $T_n \in L(C(J)), J = [0,1]$,$\{T_n\}$ 强收敛(但非范数收敛)于 I.

47. 设 $\{T_n\} \subset L(X,Y)$ 弱收敛于 T,$x_n \to x$,X 完备,则 $T_n x_n \rightharpoonup Tx$.

48. 设 $T \in L(X,Y)$,则 T^* 是单射 $\Leftrightarrow \overline{R(T)} = Y$;当 X 自反时 T 是单射 $\Leftrightarrow \overline{R(T^*)} = X^*$.

49. 若 X, Y 完备,$T \in \mathrm{CL}(X,Y), \dim Y = \infty$,则 $\exists y \in Y$:方程 $Tx = y$ 无解.

50. 设 X, Y 完备,$T \in L(X,Y)$,$R(T)$ 闭,$\dim R(T) = \infty$,则 T 不是紧算子.

51. 设 X 完备,$T \in L(X), k > 0, \| Tx \| \geqslant k \| x \| (\forall x \in X)$,则

$$T \in \mathrm{CL}(X) \Leftrightarrow \dim X < \infty.$$

52. 若 X 是无限维 Banach 空间,则几乎每个 $T \in L(X)$ 非紧线性算子.

53. 设 X 是 Hilbert 空间,$T \in \mathrm{CL}(X)$,$x_n \rightharpoonup x$,$y_n \rightharpoonup y$,则$\langle x_n, Ty_n\rangle \to \langle x, Ty\rangle$.

54. 设 X 是 Hilbert 空间,$\{e_n\} \subset X$ 是标准正交系,$T \in \mathrm{CL}(X)$,则$\langle Te_n, e_n\rangle \to 0$.

55. 设 X 是 Hilbert 空间,$T \in L(X)$ 是有限秩算子,则 $Tx = \sum_1^n \langle x, a_i\rangle e_i$,$a_i, e_i \in X$.

56. 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$,则 $T: l^p \to l^p$,$(x_i) \mapsto (x_i/i)$ 是紧线性算子.

57. $L(l^2, l^1) = \mathrm{CL}(l^2, l^1)$.

58. 设 $Tu = au$,$a, u \in C(J)$,则 $T \in \mathrm{CL}(C(J)) \Leftrightarrow a \equiv 0$.

59. 设 $Tu(x) = \int_0^x u(t)\mathrm{d}t$,则 $T \in \mathrm{CL}(C(J))$,$J = [0,1]$.

60. 嵌入 $J: C^1(J) \to C(J)$ 是紧算子.

习题 B

61. $L(X,Y)$ 完备 $\Leftrightarrow Y$ 完备.

62. 若 $\dim X = \infty$,$Y \neq \{0\}$,则存在无界线性算子 $T: X \to Y$.

63. 设 $T \in L(X,Y)$,Y 完备,X 在 $\overline{X}$ 中稠,则存在唯一 $\overline{T} \in L(\overline{X}, Y)$,使 $\overline{T} \mid X = T$,$\|T\| = \|\overline{T}\|$.

64. 设 $a_{11} = a_{22} = 1$,$a_{21} = 2$,其余 $a_{ij} = 0$,$A = (a_{ij})$,则 $\|A\|_2 < \left(\sum |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$.

65. 设 $K(\cdot,\cdot)$ 在 $J \times J$ 上可测,$\left\|\int_a^b |K(\cdot,y)|\mathrm{d}y\right\|_\infty \leqslant M$,$\left\|\int_a^b |K(x,\cdot)|\mathrm{d}x\right\|_\infty \leqslant M$,$Tu(x) = \int_a^b K(x,y)u(y)\mathrm{d}y$,$1 < p < \infty$,则 $\|T\|_p \leqslant M$.

66. 设 $F: L^1(\mathbf{R}) \to C_0(\mathbf{R})$,$u(x) \to \hat{u}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} u(x)\mathrm{d}x$,求 $\|T\|$.

67. 设$\{x_k\} \subset X$,$\forall u \in X^*: \sum |u(x_k)| < \infty$,则$\sum |u(x_k)| \leqslant \mathrm{const}\|u\|$.

68. 设 X 完备,$\{u_k\} \subset X^*$,$\sum |u_k(x)| < \infty (\forall x \in X)$,则$\sum |u_k(x)| \leqslant \mathrm{const}\|x\|$.

69. 设 $\varphi: J = [a,b] \to X$ 满足 $u \circ \varphi \in L^1(J) (\forall u \in X^*)$,则

$$\int_a^b |u(\varphi(t))|\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{const}\|u\| \quad (\forall u \in X^*).$$

70. 设 X 完备,$p(x)$ 是 X 上非负的次线性泛函,当 $x_n \to x$ 时 $p(x) \leqslant \varliminf_n p(x_n)$,则

$$p(x) \leqslant \mathrm{const}\|x\| (x \in X).$$

71. 设 $1 < p = \frac{q}{q-1} < \infty$,$\forall u \in L^p(J)$,有 $uv \in L^1(J)$,则 $v \in L^q(J)$.

72. 设 $1 < p = \frac{q}{q-1} < \infty$,$\forall x \in l^p$,有$\sum |x_n y_n| < \infty$,则 $y = (y_n) \in l^q$.

73. 设 X, Y, Z 完备,$T: X \times Y \to Z$ 是双线性算子,$T(x,y)$ 分别对 x, y 连续,则 $T(x,y)$ 在 $X \times Y$ 上连续,且 $\|T(x,y)\| \leqslant \mathrm{const}\|x\|\|y\| (x \in X, y \in Y)$.

74. 设 X, Y, Z 完备,$T: X \times Y \to Z$ 是双线性算子,$\forall v \in Z^*$,$v(T(x,y))$ 分别对 x, y 连续,则 $\|T(x,y)\| \leqslant \mathrm{const}\|x\|\|y\| (x \in X, y \in Y)$.

75. 设 $X = A \oplus B$,$\dim A = n$,B 是闭的,则 $\dim B^\perp = n$.

76. 给定 $\alpha_i \in \mathbf{K}, x_i \in X(1 \leqslant i \leqslant n)$. 则存在 $u \in X^*$ 使

$$u(x_i) = \alpha_i(1 \leqslant i \leqslant n) \Leftrightarrow \forall (\beta_i) \in \mathbf{K}^n : \left| \sum \alpha_i \beta_i \right| \leqslant \text{const} \left\| \sum \beta_i x_i \right\|.$$

77. 设 $\{e_n\}$ 是 Banach 空间 X 的 Schauder 基, $x = \sum \alpha_n(x) e_n$, 则 $\alpha_n \in X^*(\forall n \in \mathbf{N})$.

78. l^1 不是自反空间.

79. 设 A 是实赋范空间 X 中的闭凸集且 $A \neq X$, 则 A 是闭半空间的交.

80. 设 A 是实赋范空间 X 中的闭凸集, $x_n \rightharpoonup x_0$, $\{x_n\} \subset A$, 则 $x_0 \in A$.

81. 若 X 是自反空间, $\{x_n\} \subset X$, $\forall u \in X^* : \{u(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 弱收敛.

82. 设 $\{u_n\} \subset C(J)$ 有界, 则 $u_n \rightharpoonup u \Leftrightarrow \forall x \in J : u_n(x) \to u(x)$.

83. 设 $\{u_n\} \subset L^p(J)(1 < p < \infty)$, 则 $u_n \to u \Leftrightarrow \| u_n \| \to \| u \|$ 且 $u_n \rightharpoonup u$.

84. 设 $(B_n u)(x) = \sum_0^n u\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, 则 $B_n \in L(C(J)), J = [0,1]$; $\{B_n\}$ 强收敛于 I, 但 $\| B_n - I \| \geqslant 1$.

85. 设 X, Y 是完备的, $T \in L(X, Y)$, 则

$$R(T) = Y \Rightarrow R(T^*) = N(T)^{\perp}, \quad R(T^*) = X^* \Rightarrow R(T) = {}^{\perp}N(T^*).$$

86. $T \in L(X, Y)$ 是等距同构 $\Leftrightarrow T^* : Y^* \to X^*$ 是等距同构.

87. $\mathrm{CL}(X, Y)$ 对强收敛不封闭.

88. 若 $T \in \mathrm{CL}(X, Y)$, Y 完备, 则 T 可扩张为 X 的完备化上的紧线性算子.

89. 设 $A = (a_{ij})$ 如 2.2.2(iii), 则 $A \in \mathrm{CL}(l^p)$, $1 < p < \infty$.

90. 设 $K(\cdot, \cdot)$ 如 2.2.3((iii), T 是以 K 为核的积分算子, 则 $T \in \mathrm{CL}(L^p(J))(1 < p < \infty)$.

第三章　谱论初步

从线性代数知道，矩阵理论的最精采且最有价值的部分无疑是特征值理论及其种种推论.利用特征值概念能解决以下问题：

(A) 将矩阵化成某种标准形，并将矩阵按标准形分类；

(B) 依据矩阵标准形定义并计算矩阵函数；

(C) 求得矩阵的一定分解，并由之得出空间的相应分解；

(D) 求得二次型的标准形并按标准形进行分类.

要求这一切都能在 Banach 空间中实现，不免期望太高.但值得庆幸的是，与矩阵特征值概念相对应，在 Banach 空间中展开了一个高度类似的理论，它就是线性算子的谱理论.算子谱论迄今仍然是泛函分析中最优美的部分，它的内容异常丰富，本章的介绍不过是入门而已.

本章中 X 总记一个给定的复 Banach 空间，且 $X \neq \{0\}$.不过，本章的某些结果亦适用于实 Banach 空间，这种情况读者可自行判断.其次，本章也常用到复平面上的圆记号：$D_r(a) = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda - a| < r\}$，$\bar{D}_r(a) = \overline{D_r(A)}$ $(a \in \mathbf{C}, r > 0)$.

§3.1　有界线性算子的谱

引论中已提到本章明显的线性代数背景，因此以关于 $L(X)$ 的一个代数讨论起步是很自然的.我们将处处以 $L(\mathbf{C}^n)(= \mathbf{C}^{n\times n})$ 作为引导思路的模型.如同在 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 中有乘法运算一样，$L(X)$ 中亦有一种自然的"乘法"运算，即线性算子的复合：$\forall\, T, S \in L(X)$，依

$$(TS)x = T(Sx) \quad (\forall\, x \in X) \tag{1}$$

定义一个 X 上的线性算子 TS.由

$$\| TSx \| \leqslant \| T \| \| Sx \| \leqslant \| T \| \| S \| \| x \|$$

得 $TS \in L(X)$，且

$$\| TS \| \leqslant \| T \| \| S \|. \tag{2}$$

今后将称如上的 TS 为 T 与 S 的**乘积**.如此定义的算子乘法具有如同矩阵乘法一般的性质(以下 $R, S, T \in L(X)$，$\alpha \in \mathbf{C}$)：

(i) 结合律：$(RS)T = R(ST)$；因此乘幂 $T^n(n > 0)$ 有确定意义.

(ii) 联系数乘的结合律：$\alpha(TS) = (\alpha T)S = T(\alpha S)$.

(iii) 对加法的分配律：

$$T(R + S) = TR + TS, \quad (R + S)T = RT + ST.$$

(iv) 单位算子 I 是乘法单位元：$TI = IT = T$.

(v) 可逆性：$T: X \to X$ 是拓扑同构 $\Leftrightarrow$ 存在 $S \in L(X)$，使 $TS = ST = I$，这样的 S 是唯一的，称为 T 的逆，记作 T^{-1}，并称 T 为**可逆算子**(本章中"可逆"一词都在这个意义上使用)①. 约定 GL)X) 记 $L(X)$ 中可逆算子之全体.

(vi) 若 $T, S \in \mathrm{GL}(X)$，则 $TS \in \mathrm{GL}(X)$，且

$$(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}, \quad (T^n)^{-1} = (T^{-1})^n.$$

但须注意，算子乘法并**不满足**交换律，在作算子运算时务必小心. 若 $T, S \in L(X)$，$TS = ST$，则说 T 与 S **可换**. 两算子可换是很不寻常的事.

于是，$L(X)$ 成为具有线性运算与乘法运算的系统，通常称之为**算子代数**. 两种运算相结合，使得在 $L(X)$ 中有多项式概念：

$$P(T) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i T^i = \alpha_0 I + \alpha_1 T + \cdots + \alpha_n T^n \tag{3}$$

就是关于 $T \in L(X)$ 的 n 次多项式，其中 $\{\alpha_i\} \subset \mathbf{C}$，$\alpha_n \neq 0$，约定 $T^0 = I$. 对本章来说，更有意义的是，结合 $L(X)$ 中的代数运算与极限运算，导致**算子幂级数**概念：

$$f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n T^n = \alpha_0 I + \alpha_1 T + \cdots + \alpha_n T^n + \cdots. \tag{4}$$

与多项式(3)不同，对于幂级数(4)存在收敛性问题. 本章中，算子级数的收敛总理解为依**算子范数收敛**. 级数(4)的收敛条件将在本节稍后给出. 一个容易看出的充分条件是：若通常幂级数

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n \tag{5}$$

有收敛半径 R，则当 $\|T\| < R$ 时级数(4) 收敛. 事实上，由(2) 有

$$\|T^n\| \leqslant \|T\|^n, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{6}$$

于是当 $\|T\| < R$ 时级数(4) 绝对收敛：

$$\sum \|\alpha_n T^n\| \leqslant \sum |\alpha_n| \|T\|^n < \infty.$$

3.1.1 引理　设 $T \in L(X)$，则

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n, \tag{7}$$

只要其右端级数收敛. 特别，当 $\|T\| < 1$ 时(7) 必成立.

证　设(7) 右端级数收敛，以 S 记其和，则

$$(I - T)S = S - TS$$

---

① 若 $T \in L(X)$ 是单射，则有定义于 $R(T)$ 上的逆算子 $T^{-1}: R(T) \to X$. 但在本章避免用 T"可逆"一词，除非 $R(T) = X$.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} T^n - \sum_{n=1}^{\infty} T^n = I.$$

同理 $S(I-T)=I$，因此 $S=(I-T)^{-1}$. 若 $\|T\|<1$，则级数 $\sum T^n$ 绝对收敛，因而必收敛. □

读者想必已看出，(7) 正是展开式

$$\frac{1}{1-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (|\lambda|<1)$$

的推广. 不妨就称(7) 为算子 $(I-T)^{-1}$ 的**二项式级数**.

对于 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$，$\lambda \in \mathbf{C}$，熟知以下关系成立：

$$\begin{aligned} \lambda \text{ 是 } A \text{ 的特征值} &\Leftrightarrow \det(\lambda I - A) = 0 \\ &\Leftrightarrow N(\lambda I - A) \neq \{0\} \\ &\Leftrightarrow \lambda I - A \text{ 不可逆}. \end{aligned}$$

这提示出以下定义.

3.1.2 定义　设 $T \in L(X)$.

(i) 若 $\lambda \in \mathbf{C}$，$\lambda I - T$ 不可逆，则称 λ 为 T 的**谱值**. 以 $\sigma(T)$ 记 T 的谱值之全体，称它为 T 的**谱**；称

$$r_\sigma(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| \tag{8}$$

为 T 的**谱半径**.

(ii) 令 $\rho(T) = \mathbf{C} \setminus \sigma(T)$，$\lambda \in \rho(T)$ 称为 T 的**正则值**，称

$$R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1} \quad (\lambda \in \rho(T)) \tag{9}$$

为**预解式**. 当不致误解时，也将 $R(\lambda, T)$ 写作 $R(\lambda)$ 或 R_λ.

(iii) 若 $\lambda \in \mathbf{C}$，存在 $x \neq 0$ 使 $Tx = \lambda x$ ($\Leftrightarrow x \in N(\lambda I - T)$)，则称 λ 为 T 的**特征值**，并称 x 为 T 关于 λ 的**特征向量**，称 $N(\lambda I - T)$ 为 T 关于特征值 λ 的**特征子空间**. 以 $\sigma_p(T)$ 记 T 的特征值之全体，称它为 T 的**点谱**.

因 $\lambda \in \sigma_p(T) \Rightarrow N(\lambda I - T) \neq \{0\} \Rightarrow \lambda I - T$ 不可逆，故 $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$. 当 $\dim X < \infty$ 时 $\sigma_p(T) = \sigma(T)$. 若 $\dim X = \infty$，则 $\sigma_p(T)$ 可能是 $\sigma(T)$ 的真子集，下面就是一个例子.

3.1.3 例　设 $T: l^2 \to l^2$ 定义如下：

$$Tx = (0, x_1, x_2, \cdots), \quad x = (x_i) \in l^2.$$

显然有 $\|Tx\|_2 = \|x\|_2$，因此 $T \in L(l^2)$ 且 T 是单射，因而 $\lambda = 0$ 不是 T 的特征值. 另一方面，因 T 不是满射，从而不可逆，故 $\lambda = 0$ 是 T 的谱值.

这是第一个信号：Banach 空间中的算子谱论并不是矩阵特征值理论的完全推广！

对于 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$，原则上我们能计算出 A 的全部特征值(它至多 n 个). 对于一般的 $T \in L(X)$，没有任何计算谱值的一般方法，我们甚至不知道，$\sigma(T)$ 是有限集还是无限集. 因此，关于 $\sigma(T)$ 特性的任何一般性结论均属可贵. 以下定理则有

点令人大喜过望.

3.1.4 Gelfand 定理 设 $T \in L(X)$,则 $\sigma(T)$ 是非空紧集,且成立**谱半径公式**:

$$\boxed{r_\sigma(T) = \lim_n \| T^n \|^{1/n}.} \tag{10}$$

定理的证明稍长了点,按本书的原则,似应移入章末.但证明中包含了一些极富启发性的方法,这就不能割爱了.

证 为使证明的思路更具条理性,分几个步骤进行.不妨设 $T \neq 0$.当 $T = 0$ 时,显然有 $\sigma(T) = \{0\}$.

1° 证 $\lim_n \| T^n \|^{1/n} = \inf_n \| T^n \|^{1/n} \triangleq \beta$.显然

$$\beta \leqslant \varliminf_n \| T^n \|^{1/n},$$

因此只要证

$$\beta \geqslant \varlimsup_n \| T^n \|^{1/n}.$$

为此,又只要证

$$\varlimsup_n \| T^n \|^{1/n} \leqslant \| T^m \|^{1/m}, \quad m = 1,2,\cdots. \tag{11}$$

取定 $m \in \mathbf{N}$. $\forall n \in \mathbf{N}$,有分解 $n = pm + q$,其中 $p, q \in \mathbf{Z}_+, 0 \leqslant q < m$.重复应用不等式(6)得:

$$\| T^n \| \leqslant \| T^{pm} \| \| T^q \| \leqslant \| T^m \|^p \| T \|^q.$$

于是

$$\begin{aligned}\varlimsup_n \| T^n \|^{1/n} &\leqslant \varlimsup_n \| T^m \|^{p/n} \| T \|^{q/n} \\ &= \varlimsup_n \| T^m \|^{p/(pm+q)} = \| T^m \|^{1/m},\end{aligned}$$

这表明不等式(11)成立.

2° 证 $r_\sigma(T) \leqslant \beta$.因幂级数 $\sum \| T^n \| \lambda^n$ 的收敛半径为

$$\lim_n \| T^n \|^{-1/n} = 1/\beta$$

(收敛半径计算公式见于任何数学分析教程),故当 $|\lambda| > \beta$ 时,

$$R_\lambda \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} T^n / \lambda^{n+1} \tag{12}$$

收敛(且为绝对收敛).于是由 3.1.1 得

$$R_\lambda = \lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}T)^{-1} = (\lambda I - T)^{-1},$$

因而 $\lambda \in \rho(T)$.可见 $\lambda \in \sigma(T) \Rightarrow |\lambda| \leqslant \beta$,即 $r_\sigma(T) \leqslant \beta$.

3° 证 $\rho(T)$ 为开集.取定 $\lambda_0 \in \rho(T)$,令 $R_0 = R(\lambda_0, T), R_\lambda = R(\lambda, T)$(依(9)).由 3.1.1,当 $|\lambda - \lambda_0| < 1/\| R_0 \|$ 时,

$$\lambda I - T = (\lambda - \lambda_0)I + R_0^{-1} = R_0^{-1}[I - (\lambda_0 - \lambda)R_0] \tag{13}$$

可逆,因此 $\lambda \in \rho(T)$. 故 $\rho(T)$ 为开集. 其次,结合(7),(13)得

$$R_\lambda = [I - (\lambda_0 - \lambda)R_0]^{-1}R_0$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_0 - \lambda)^n R_0^{n+1}. \tag{14}$$

4° 证 $\sigma(T) \neq \varnothing$. 假设其反面: $\sigma(T) = \varnothing$, 于是 $R_\lambda = R(\lambda, T)$ 对每个 $\lambda \in \mathbf{C}$ 有定义. 任给 $x \in X, u \in X^*$, 定义复函数

$$f(\lambda) = u(R_\lambda x) \quad (\lambda \in \mathbf{C}). \tag{15}$$

任给 $\lambda_0 \in \mathbf{C}$, 利用式(14)(依第 3° 段记号)得

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} u(R_0^{n+1}x)(\lambda_0 - \lambda)^n.$$

可见 $f(\lambda)$ 处处解析,因而是一个整函数. 当 $|\lambda| > \beta$ 时,结合(12)(15)有

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} u(T^n x)/\lambda^{n+1}, \tag{16}$$

这表明 $f(\infty) = 0$. 于是由 Liouville 定理有 $f(\lambda) \equiv 0$; 由 u, x 的任意性得 $R_\lambda = 0$ (参考 2.5.4), 这与 R_λ 可逆矛盾.

结合 2° ~ 4° 得 $\sigma(T)$ 为非空紧集.

5° 证 $r_\sigma(T) \geqslant \beta$(从而 $r_\sigma(T) = \beta$). 只需证,对任给的 $\alpha > r_\sigma(T)$, 有 $\beta \leqslant \alpha$. 任给 $x \in X, u \in X^*$, 设 $f(\lambda)$ 依(15), 则 $f(\lambda)$ 在 $|\lambda| > r_\sigma(T)$ 内解析,因而其 Laurent 级数(16)在 $\lambda = \alpha$ 时绝对收敛,于是

$$\sup_n |u(\alpha^{-n}T^n x)| < \infty. \tag{17}$$

因 x, u 是任取的,利用 2.3.6 与 2.5.9,从(17)推出

$$\sup_n \|\alpha^{-n}T^n\| < \infty.$$

这结合 1° 得出 $\beta \leqslant \alpha$. □

3.1.4 断定 $\sigma(T)$ 是非空紧集,固然是很基本的,但不算是很精细的结论. 实际上,有例子指出(见习题 9):任何非空紧集 $\sigma \subset \mathbf{C}$ 都是某个有界线性算子的谱! 3.1.4 中真正惊人的结论是谱半径公式(10),如此准确的定量关系在泛函分析中殊不多见. 如果考虑到, $\sigma(T)$ 与 X 中等价范数的选择无关,而(10)式右端似乎依赖于范数选择,就更显示出(10)的深刻性.

由(10)直接推出一个很简单的估计:

$$r_\sigma(T) \leqslant \|T\|. \tag{18}$$

(18)用起来很简便,只是过于粗略:有例子表明,即使 $\|T\|$ 很大,亦有可能 $r_\sigma(T) = 0$(见习题 12).

Gelfand 定理应用极广,以下简单应用立即显示出它的价值.

3.1.5 定理 设幂级数 $\sum \alpha_n \lambda^n$ 的收敛半径为 R, $T \in L(X)$.

(i) 若 $r_\sigma(T) < R$,则级数 $\sum \alpha_n T^n$ 绝对收敛.

(ii) 若 $r_\sigma(T) > R$,则级数 $\sum \alpha_n T^n$ 发散.

证 (i) 对正项级数 $\sum \|\alpha_n T^n\|$ 运用熟知的 Cauchy 判别法:

$$\overline{\lim_n} \|\alpha_n T^n\|^{1/n} = \overline{\lim_n} |\alpha_n|^{1/n} \lim_n \|T^n\|^{1/n}$$
$$= \frac{r_\sigma(T)}{R} < 1, \tag{19}$$

可见 $\sum \|\alpha_n T^n\|$ 收敛.

(ii) 若 $\sum \alpha_n T^n$ 收敛,则 $\lim\limits_n \|\alpha_n T^n\| = 0$,因此

$$\sup_n \|\alpha_n T^n\| \triangleq M < \infty.$$

于是(用(19)中的式子)

$$\frac{r_\sigma(T)}{R} = \overline{\lim_n} \|\alpha_n T^n\|^{1/n} \leqslant \lim_n M^{1/n} \leqslant 1,$$

即 $r_\sigma(T) \leqslant R$.因此,当 $r_\sigma(T) > R$ 时级数 $\sum \alpha_n T^n$ 不能收敛. □

这样,除了 $r_\sigma(T) = R$ 的情况(这意味着在圆周 $|\lambda| = R$ 上存在 T 的谱值)以外,3.1.5 完全解决了算子幂级数的收敛判别问题.若 $r_\sigma(T) = R$,则由通常幂级数的情况就知道,$\sum \alpha_n T^n$ 既可能收敛,也可能发散.

§3.2 算子函数

上节式(4)所定义的 $f(T)$,实际上可看作以 T 为自变量的算子函数,它是复解析函数 $f(\lambda) = \sum \alpha_n \lambda^n$ 的某种扩张.本节将通过稍不同的途径来讨论这类算子函数.我们将着重强调展开理论所循的思路,而不拘泥于某些推导细节.特别,对于本节用到的算子值函数的积分,仅给出一个很简略的描述;熟悉复分析的读者不难自行补足有关的细节.

利用 3.1.5,可得出用幂级数定义算子函数的如下规则:设 $f(\lambda)$ 是圆 $D_r(\lambda_0) = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda - \lambda_0| < r\}$ 内的复解析函数,则 $f(\lambda)$ 在 $D_r(\lambda_0)$ 内有 Taylor展开式:

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\lambda_0)}{n!}(\lambda - \lambda_0)^n. \tag{1}$$

于是,$f(\lambda)$ 可扩张为集 $\{T \in L(X) : \sigma(T) \subset D_r(\lambda_0)\}$ 内的算子函数

$$f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\lambda_0)}{n!}(T - \lambda_0 I)^n, \tag{2}$$

不妨称(2)右端的级数为 $f(T)$ 的 Taylor 级数表示.例如,熟知的对数函数

$$\ln(1+\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\lambda^n}{n},\quad \lambda\in D_1(0)$$

可扩张为定义于$\{T\in L(X):\sigma(T)\subset D_1(0)\}$内的"算子对数函数"

$$\ln(I+T)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}T^n}{n}.$$

类似地,还可定义算子的指数函数 e^T、正弦函数 $\sin T$,等等.这样,似乎我们已轻而易举地完成从复解析函数到**算子解析函数**的过渡.

这实在是很引人的.不过,我们立即会发现以下问题:

(A) Taylor 级数仅能表达圆域内的解析函数.对任意开集 $\Omega\subset\mathbf{C}$内的解析函数 $f(\lambda)$[①]及满足 $\sigma(T)\subset\Omega$ 的 $T\in L(X)$,应如何定义 $f(T)$?

(B) 算子函数 $f(T)$ 真正类似于其原型 $f(\lambda)$ 吗?如果不能使用恒等式

$$e^Te^{-T}=I,\quad e^{\ln(I+T)}=I+T,$$

我们能将 e^T 与 $\ln(I+T)$ 认作指数函数与对数函数吗?

(C) 应如何应用由扩张而来的算子函数?

幸而,对这些问题有一个令人充分满意的解答.

首先考虑任意复解析函数的扩张问题.取定非空开集 $\Omega\subset\mathbf{C}$,以 $H(\Omega)$ 记 Ω 内复解析函数之全体,令

$$D_\Omega=\{T\in L(X):\sigma(T)\subset\Omega\}.\tag{3}$$

设 $f(\lambda)\in H(\Omega)$,$T\in D_\Omega$.因未必有 $D_r(\lambda_0)\subset\Omega$,使 $\sigma(T)\subset D_r(\lambda_0)$,一般无法用公式(2)来定义 $f(T)$.如果联想到 $f(\lambda)$ 有如下 Cauchy 公式表示:

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\tau)(\tau-\lambda)^{-1}d\tau,\tag{4}$$

其中 L 是 Ω 内任一围绕 λ 的简单闭曲线(为行文简便,下面称之为**围道**,且假定沿其正向行进时保持 λ 所在的区域在左边),那么,我们猜想似乎应将 $f(T)$ 定义为(与(4)对照!)

$$f(T)=\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\tau)(\tau I-T)^{-1}d\tau.\tag{5}$$

不过,我们还得准备算子值函数沿平面曲线积分的概念.

设 L 是复平面上任一可求长曲线,$T(\tau)$ 是定义于 L 上而取值于$L(X)$中的**算子值函数**,则可用通常的"分割、求和、取极限"的方式定义 $T(\tau)$ 沿 L 的积分:

$$\int_L T(\tau)d\tau=\lim_{\max\Delta\tau_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}T(\xi_i)\Delta\tau_i,\tag{6}$$

其中 $\tau_0,\tau_1,\cdots,\tau_n$ 顺次为L 上的分点,τ_0,τ_n 分别为L 的起点与终点,ξ_i 是L 上介

① 因开集 Ω 不必是区域,有些作者称这样的 $f(\lambda)$ 为"局部解析函数".

于 τ_{i-1} 与 τ_i 之间的任一点，$\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1}$. 用类似于复分析中的方法不难证明，当函数 $\tau \to T(\tau)$ 连续时，积分(6) 必存在. 利用定义式(6) 也易推出，对任给 $u \in X^*$，$x \in X$ 有

$$\left\langle u, \int_L T(\tau)\mathrm{d}\tau \cdot x \right\rangle = \int_L \langle u, T(\tau)x\rangle \mathrm{d}\tau. \tag{7}$$

3.2.1 定义 任给 $f(\lambda) \in H(\Omega)$，依式(5) 定义一个从 D_Ω 到 $L(X)$ 的函数 $f(T)$，(5) 中 L 是 Ω 内任一围绕 $\sigma(T)$ 的围道. 称 $f(T)$ 为 $f(\lambda)$ 的扩张.

对于以上定义有几个明显的疑问需要澄清.

1° 得说明(5) 中的积分必定存在. 首先，因 $\sigma(T)$ 是开集 Ω 的紧子集，Ω 内必存在围绕 $\sigma(T)$ 的围道(这一事实的严格证明比初看起来要繁琐些). 其次，§3.1(14) 显然蕴涵了 $R(\lambda, T)$ 对于 $\lambda \in \rho(T)$ 的连续性，因此，(5) 式中的被积函数 $\tau \to f(\tau)R(\tau, T)$ 在 L 上连续，故积分存在.

2° (5) 右端积分不依赖于 L 的选择. 事实上，结合(5) 与(7) 知对任给 $u \in X^*$，$x \in X$ 有

$$\langle u, f(T)x\rangle = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L f(\tau)\langle u, R(\tau, T)x\rangle \mathrm{d}\tau. \tag{8}$$

在 3.1.4 之证中，实际上已经指明 $\langle u, R(\tau, T)x\rangle$ 关于 τ 是 $\rho(T)$ 内的复解析函数. 因此，(8) 右端之被积函数是 $\Omega \setminus \sigma(T)$ 内的解析函数. 由复分析中的熟知结论，(8) 右端的积分与路径 L 的选择无关. 而 $u \in X^*$，$x \in X$ 是任给的，用3.5.4 即推出 $f(T)$ 的定义不依赖于 L 的选择.

3° 3.2.1 与用 Taylor 级数(2) 定义 $f(T)$ 的方法相容. 事实上，若 $\sigma(T) \subset D_r(\lambda_0) \subset \Omega$，不妨设 $\bar{D}_r(\lambda_0) \subset \Omega$，取 $L = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda - \lambda_0| = r\}$，则(2)(5) 两式表达的 $f(T)$ 一致：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L f(\lambda)(\lambda I - T)^{-1}\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L f(\lambda)[(\lambda - \lambda_0)I + \lambda_0 I - T]^{-1}\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L f(\lambda)(\lambda - \lambda_0)^{-1}\left(I - \frac{T - \lambda_0 I}{\lambda - \lambda_0}\right)^{-1}\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L f(\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(T - \lambda_0 I)^n}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}}\mathrm{d}\lambda \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}}\mathrm{d}\lambda\right](T - \lambda_0 I)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\lambda_0)}{n!}(T - \lambda_0 I)^n,
\end{aligned}$$

其中用到 3.1.5,

$$r_\sigma\left(\frac{T-\lambda_0 I}{\lambda-\lambda_0}\right)<1$$

及

$$f^{(n)}(\lambda_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}d\lambda.$$

4° $f(T)$ 确为 $f(\lambda)$ 的扩张. 事实上, 显然有等距嵌入

$$\mathbf{C}\to L(X),\lambda\to\lambda I,\tag{9}$$

且此嵌入保持乘积运算. 因此, 不妨认为 $\mathbf{C}\subset L(X)$, 且等同 λ 与 λI. 取定 $\lambda\in\mathbf{C}$, 易见 $\sigma(\lambda I)=\{\lambda\}$. 设 L 包围点 λ, 则由(5)有

$$f(\lambda I)=\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\tau)(\tau I-\lambda I)^{-1}d\tau$$
$$=\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau-\lambda}d\tau\right]I=f(\lambda)I,$$

这正表明 $f(\lambda I)$ 与原来的 $f(\lambda)$ 一致.

这样, 本节开头提出的问题(A) 已告解决. 下面是对问题(B) 的一个解答, 它是本节的中心结果.

3.2.2 定理 设 $f(\lambda),g(\lambda)\in H(\Omega),h(\lambda)\in H(\Omega'),f(\Omega)\subset\Omega'$, $T\in D_\Omega$. 则

$$f(\lambda)\equiv 1\Rightarrow f(T)=I;\tag{10}$$
$$f(\lambda)\equiv \lambda\Rightarrow f(T)=T;\tag{11}$$
$$(f+g)(T)=f(T)+g(T);\tag{12}$$
$$(fg)(T)=f(T)g(T);\tag{13}$$
$$(h\circ f)(T)=h(f(T)).\tag{14}$$

证 结论(10)~(12)是很明显的, 只需证(13)(14). 记 $R(\lambda)=R(\lambda,T)$.

证(13). 选取围道 L,Γ 如图 3－1, 则

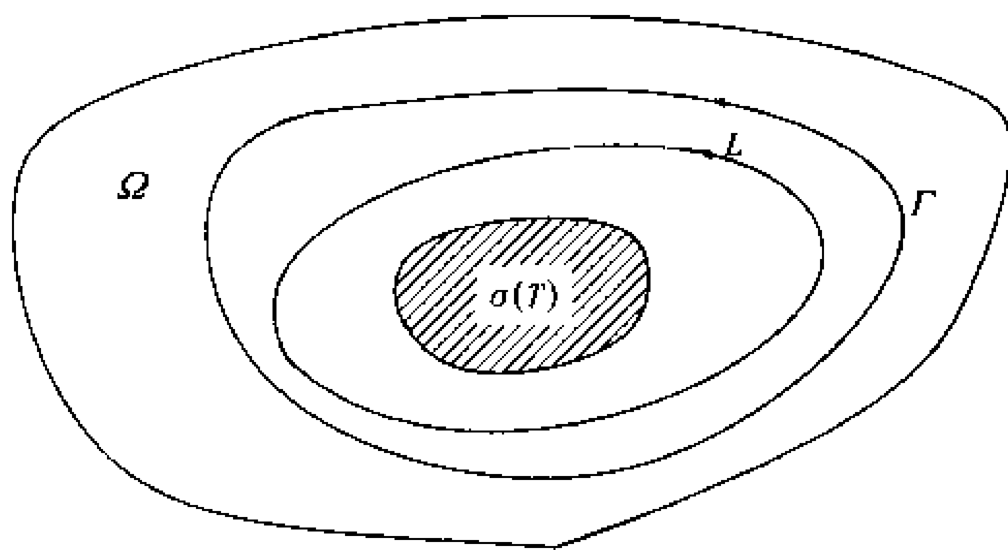


图 3－1

$$f(T)g(T)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_L f(\lambda)R(\lambda)d\lambda\int_\Gamma g(\tau)R(\tau)d\tau$$
$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_L f(\lambda)d\lambda\int_\Gamma g(\tau)R(\lambda)R(\tau)d\tau$$
$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_L f(\lambda)d\lambda\int_\Gamma g(\tau)\,\frac{R(\lambda)-R(\tau)}{\tau-\lambda}d\tau$$
$$=I_1-I_2,$$

其中

$$I_1=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_L f(\lambda)d\lambda\int_\Gamma g(\tau)\,\frac{R(\lambda)}{\tau-\lambda}d\tau$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\lambda)R(\lambda)d\lambda\,\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{g(\tau)}{\tau-\lambda}d\tau$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\lambda)g(\lambda)R(\lambda)d\lambda \qquad \text{(用 Cauchy 公式)}$$
$$=(fg)(T);$$
$$I_2=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_L f(\lambda)d\lambda\int_\Gamma g(\tau)\,\frac{R(\tau)}{\tau-\lambda}d\tau$$
$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma g(\tau)R(\tau)d\tau\int_L\frac{f(\lambda)}{\tau-\lambda}d\lambda$$
$$=0. \qquad \text{(用 Cauchy 定理)}$$

这表明(13)成立. 以上演算中用到一个关键恒等式①

$$R(\lambda)R(\tau)=\frac{R(\lambda)-R(\tau)}{\tau-\lambda}. \tag{15}$$

(15)的验证是直接的(请验证!). (15)可与以下初等恒等式对照:

$$\frac{1}{(\lambda-a)(\tau-a)}=\frac{1}{\tau-\lambda}\left(\frac{1}{\lambda-a}-\frac{1}{\tau-a}\right).$$

证(14). 因 $\sigma(f(T))=f(\sigma(T))$(此处提前应用定理3.2.3,注意3.2.3之证用不到式(14)!),而 $f(\Omega)\subset\Omega'$,故 $\sigma(f(T))$ 是 Ω' 的紧子集,因此可在 Ω' 中取一围绕 $\sigma(f(T))$ 的围道 L',可设 L' 亦围绕 $f(L)$,L 是 Ω 中围绕 $\sigma(T)$ 的围道. 于是,

$$h(f(T))=\frac{1}{2\pi i}\int_{L'}h(\tau)[\tau I-f(T)]^{-1}d\tau$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{L'}h(\tau)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{R(\lambda,T)}{\tau-f(\lambda)}d\lambda\right]d\tau$$

① 称为"Hilbert 关系式"或"预解式方程".

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L R(\lambda, T)d\lambda \frac{1}{2\pi i}\int_{L'} \frac{h(\tau)}{\tau - f(\lambda)}d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L h(f(\lambda))R(\lambda, T)d\lambda \qquad \text{(用 Cauchy 公式)}$$

$$= (h \circ f)(T),$$

其中用到

$$[\tau I - f(T)]^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{R(\lambda, T)}{\tau - f(\lambda)}d\lambda \triangleq S. \tag{16}$$

(16)基于

$$S[\tau I - f(T)] = [\tau I - f(T)]S = I \tag{17}$$

(参考§3.1);而(17)又基于(10),(13)及

$$\frac{1}{\tau - f(\lambda)}[\tau - f(\lambda)] = 1.$$

至此,定理证完. □

3.2.2 的意义在于,若有一个复解析函数的恒等式

$$\varphi(\lambda) = F(f(\lambda), g(\lambda), \cdots),$$

其中右端由 $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ 等经加法、乘法及复合构成,则对于适当的 $T \in L(X)$ 成立

$$\varphi(T) = F(f(T), g(T), \cdots).$$

这表明,可将复解析函数的恒等式用于相应的算子函数.例如,从

$$\sin^2\lambda + \cos^2\lambda = 1,$$

$$\cos\lambda = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right),$$

$$e^{\lambda}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1,$$

$$e^{\ln(1+\lambda)} = 1 + \lambda$$

直接得出

$$\sin^2 T + \cos^2 T = I,$$

$$\cos T = \sin\left(\frac{\pi}{2}I - T\right),$$

$$e^T e^{-T} = e^{-T}e^T = I,$$

$$e^{\ln(I+T)} = I + T,$$

其中 $T \in L(X)$,最后一式要求 $\sigma(T) \subset D_1(0)$.注意,从 $e^T e^{-T} = e^{-T}e^T = I$ 推出 e^T 恒可逆,且 $(e^T)^{-1} = e^{-T}$.

3.2.3 谱映射定理　设 $f(\lambda) \in H(\Omega)$, $T \in D_\Omega$,则

$$f(\sigma(T)) = \sigma(f(T)). \tag{18}$$

证　等式(18)相当于, $\forall \alpha \in \mathbf{C}$, 有

$$f(\alpha)\overline{\in}\sigma(f(T))\Rightarrow\alpha\overline{\in}\sigma(T); \tag{19}$$

$$\alpha\overline{\in}f(\sigma(T))\Rightarrow\alpha\overline{\in}\sigma(f(T)). \tag{20}$$

现在分别证之. 首先设 $f(\alpha)\overline{\in}\sigma(f(T))$. 令

$$\varphi(\lambda)=\frac{f(\lambda)-f(\alpha)}{\lambda-\alpha},$$

则 $\varphi(\lambda)\in H(\Omega)$(注意 φ 在 $\lambda=\alpha$ 亦解析!). 由

$$(\alpha-\lambda)\varphi(\lambda)=f(\alpha)-f(\lambda)$$

得

$$(\alpha I-T)\varphi(T)=f(\alpha)I-f(T),$$

故

$$(\alpha I-T)\varphi(T)R(f(\alpha),f(T))=I.$$

同理

$$\begin{aligned}I&=R(f(\alpha),f(T))\varphi(T)(\alpha I-T)\\&=\varphi(T)R(f(\alpha),f(T))(\alpha I-T),\end{aligned}$$

可见 $\alpha I-T$ 可逆, 因而 $\alpha\overline{\in}\sigma(T)$. 于是(19) 得证.

其次设 $\alpha\overline{\in}f(\sigma(T))$. 令

$$g(\lambda)=[\alpha-f(\lambda)]^{-1},$$

则 $g(\lambda)$ 在 $\sigma(T)$ 上有限. 因 $\sigma(T)$ 是紧集, 故有开集 U, 使 $\sigma(T)\subset U\subset\Omega$, 使 $g(\lambda)\in H(U)$. 于是

$$g(T)=[\alpha I-f(T)]^{-1},$$

可见 $\alpha\overline{\in}\sigma(f(T))$. 因此(20) 得证. □

由 3.2.3 直接推出, 若 $\lambda\in\sigma(T)$, 则 $\lambda^n\in\sigma(T^n)$. 在 $\dim X<\infty$ 的情况下, 以上结果在线性代数中是熟知的. 3.2.3 则将这类结果推广到了很一般的情况.

3.2.3 的证明已经初步展示了算子函数及 3.2.2 的应用. 进一步的应用将在后面给出.

§3.3 谱分解

由线性代数知道, 若 $\dim X=n$, $T\in L(X)$, T 关于 X 的某个基 $\{e_i\}$ 的矩阵 A 为对角分块形:

$$A=\operatorname{diag}(A_1,A_2,\cdots,A_r),$$

则有空间 X 的直和分解及算子 T 的相应分解:

$$X=X_1\oplus X_2\oplus\cdots\oplus X_r;$$

$$T=T_1+T_2+\cdots+T_r,$$

其中 $T_i(1\leqslant i\leqslant r)$ 看作 X_i 上的线性算子具有较简单的结构, 因而上述分解式能

特别有效地表现出 T 的特性.

那么,能否在一般 Banach 空间中建立类似结果?这一问题远不简单.现在,不再有矩阵这样较具体的工具可用,但我们可以借助于谱概念与算子函数.在上节中已看到,算子函数具有很大的灵活性.

首先讨论 Banach 空间的直和分解.给定 Banach 空间 X,分解式

$$X = \bigoplus_{i=1}^{n} X_i = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$$

是一直和意味着:每个 $X_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 是 X 的子空间,每个 $x \in X$ 有唯一分解式:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i, x_i \in X_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{1}$$

令 $P_i x = x_i$, x_i 依(1),则得到一个线性算子 $P_i : X \to X$,称它为从 X 到 X_i 的**投影算子**,或简称为**投影**.直接看出:

$$N(P_i) = \bigoplus_{j \neq i} X_j, \quad R(P_i) = X_i, \quad P_i | X_i = I^{①}. \tag{2}$$

若每个 X_i 是闭子空间,则称 $X = \bigoplus_{i=1}^{n} X_i$ 为**拓扑直和**.

3.3.1 命题 (i) 分解 $X = \bigoplus_{i=1}^{n} X_i$ 是拓扑直和 $\Leftrightarrow$ 每个 P_i 连续.

(ii) 设 $X = \bigoplus_{i=1}^{n} X_i$ 是拓扑直和,$T_i : X_i \to X_i$ 是线性算子,

$$Tx = \sum_{i} T_i x_i, x_i = P_i x \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{3}$$

则 $T \in L(X) \Leftrightarrow$ 每个 $T_i \in L(X_i)$,T 可逆 $\Leftrightarrow$ 每个 T_i 可逆;每个 X_i 是 T 的**不变子空间**,即 $TX_i \subset X_i (1 \leqslant i \leqslant n)$;$T | X_i = T_i$.

与空间的分解式相呼应,条件(3)界定出算子 T 的分解式

$$T = \bigoplus_{i=1}^{n} T_i = T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_n.$$

证 (i) 若 $X = \bigoplus_{i=1}^{n} X_i$ 是拓扑直和,则每个 X_i 是 Banach 空间,从而积空间 $\prod X_i$ 是 Banach 空间(参考上章题 17),映射

$$\prod X_i \to X, \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \to \sum_i x_i$$

显然是连续的线性同构.由逆算子定理(2.3.2),逆映射

$$X \to \prod_i X_i, \quad x \to (P_1 x, \cdots, P_n x)$$

连续,这推出每个投影 P_i 连续.

反之,若每个 P_i 连续,则 $X_i = N\left(\sum_{j \neq i} P_j\right) (1 \leqslant i \leqslant n)$ 是 X 的闭子空间,因此 $X = \bigoplus_{i=1}^{n} X_i$ 是拓扑直和.

---

① 此处 I 记 X_i 上的单位算子.不同空间上的单位算子,皆用同一个记号 I,一般并无混淆之虞.若要强调区别,可将 X 上的单位算子写作 I_X.

(ii) 以 $J_i: X_i \to X$ 记嵌入映射,即 $J_i x_i = x_i (x_i \in X_i)$,则显然 $J_i \in L(X_i, X)$. (3) 表明

$$T = \sum_i J_i T_i P_i, T_i = P_i T J_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{4}$$

由(4)直接推出 $T \in L(X) \Leftrightarrow$ 每个 $T_i \in L(X_i)$. 其次,显然 T 是双射 $\Leftrightarrow$ 每个 $T_i: X_i \to X_i$ 是双射,因而 T 可逆 $\Leftrightarrow$ 每个 T_i 可逆. 由(3)直接看出,当 $x \in X_i$ 时, $Tx = T_i x \in X_i$,故 X_i 是 T 的不变子空间. □

下面是本节的中心结果.

3.3.2 谱分解定理 设 $T \in L(X)$, $\sigma(T) = \bigcup_1^n \sigma_i$, $n \geqslant 2$, σ_i 是互不相交的非空闭集,则存在 X 的拓扑直和分解及 T 的相应分解:

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n; \tag{5}$$

$$T = T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_n, \tag{6}$$

使得 $T_i \in L(X_i)$, $\sigma(T_i) = \sigma_i (1 \leqslant i \leqslant n)$.

证 取充分小的 $\varepsilon > 0$,令

$$\Omega_i = \{\lambda \in \mathbf{C}: d(\lambda, \sigma_i) < \varepsilon\} \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

使得 $\bar{\Omega}_i$ 互不相交(此种 ε 之存在参看 2.6.4 之证). 令 $\Omega = \bigcup \Omega_i$,则 Ω 是一开集, $\sigma(T) \subset \Omega$. 以 f_i 记 Ω_i 之特征函数,则 $f_i \in H(\Omega)$. 令 $P_i = f_i(T)$, $A_i = TP_i$, $X_i = P_i X$, $T_i = A_i \mid X_i: X_i \to X_i$,今验证 $X_i, T_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 即合于定理要求.

1° 验证(5). 首先利用 3.2.2,从恒等式

$$f_i(\lambda) f_j(\lambda) \equiv \delta_{ij} f_i(\lambda), \lambda f_i(\lambda) \equiv f_i(\lambda)\lambda, \sum_i f_i(\lambda) \equiv 1 \quad (\lambda \in \Omega)$$

得出

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_i, TP_i = P_i T, \sum_i P_i = I; \tag{7}$$

特别地, $P_i^2 = P_i (1 \leqslant i \leqslant n)$. 由 $\sum P_i = I$ 及 $X_i = P_i X$ 得

$$X = IX = \sum_i P_i X = \sum_i X_i.$$

若

$$x = \sum_i x_i, x_i = P_i y_i \in X_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n), \tag{8}$$

则

$$P_i x = \sum_j P_i P_j y_j = P_i y_i = x_i,$$

这表明分解式(8)具唯一形式: $x = \sum P_i x$,因而直和分解(5)成立,且 P_i 就是从 X 到 X_i 的投影. 因 $P_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 皆连续,故(5)是拓扑直和(3.3.1).

2° 验证(6). 依 T_i 的定义知有 $T_i \in L(X_i) (1 \leqslant i \leqslant n)$. $\forall x \in X$,令 $x_i = P_i x$,则用(7)得

$$Tx = \sum_i Tx_i = \sum_i TP_i^2 x$$
$$= \sum_i \lambda_i P_i x = \sum_i T_i x_i.$$

对照(3),看出分解式(6)成立.

3° 验证 $\sigma(T_i) = \sigma_i (1 \leqslant i \leqslant n)$. 只要证 $\sigma(T_1) = \sigma_1$,不妨设 $n = 2$(否则以 $\sigma_2 \cup \cdots \cup \sigma_n$ 当作 σ_2). 任取 $\lambda_0 \in \sigma_1$,令

$$\varphi(\lambda) = f_2(\lambda) \big/ (\lambda_0 - \lambda),$$

则 $\varphi(\lambda) \in H(\Omega)$. 由 3.2.2 有

$$P_2 = (\lambda_0 I - T)\varphi(T) = \varphi(T)(\lambda_0 I - T); \tag{9}$$
$$\varphi(T) = P_2\varphi(T), \quad \varphi(T)X \subset X_2. \tag{10}$$

令 $B = \varphi(T) | X_2 : X_2 \to X_2$(用(10)),则由(9)有

$$I = P_2 | X_2 = (\lambda_0 I - T_2)B = B(\lambda_0 I - T_2),$$

可见 $\lambda_0 \overline{\in} \sigma(T_2)$. 这推出 $\lambda_0 \in \sigma(T_1)$,否则,$\lambda_0 I - T_1$ 与 $\lambda_0 I - T_2$ 皆可逆,于是

$$\lambda_0 I - T = (\lambda_0 I - T_1) \oplus (\lambda_0 I - T_2)$$

可逆((3.3.1)(ii)),与 $\lambda_0 \in \sigma_1 \subset \sigma(T)$ 相矛盾. 因此 $\sigma_1 \subset \sigma(T_1)$.

反之,若 $\lambda_0 \in \sigma(T_1)$,则必 $\lambda_0 \in \sigma(T)$(用 3.3.1(ii)),因而 $\lambda_0 \in \sigma_1$,否则 $\lambda_0 \in \sigma_2$,依上段所证将得 $\lambda_0 \overline{\in} \sigma(T_1)$!这就证得 $\sigma(T_1) \subset \sigma_1$,因此 $\sigma(T_1) = \sigma_1$. □

将 3.3.2 用到以下特殊情况:$\dim X = n$, $\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$, λ_i 互不相同. 取 $\sigma_i = \{\lambda_i\} (1 \leqslant i \leqslant n)$ 得到分解式(5),(6),其中每个 X_i 是 X 的 1 维子空间;而

$$T_i x_i = \lambda_i x_i, x_i \in X_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

即每个 T_i 是 X_i 上的相似变换. 所得的分解就是 T 的对角分解;若 $0 \neq e_i \in X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$,则 T 关于基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 的矩阵正是对角形

$$\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}.$$

这些结论在线性代数中是熟知的.

至于在一般的 Banach 空间中应用 3.3.2,首先应取定一个适当的"谱分解" $\sigma(T) = \bigcup \sigma_i$. 这种分解可能根本不存在,因 $\sigma(T)$ 可以是一个连通集(参看题 9)!在这种分解存在的情况下,也只有某些适当选定的分解才导致有意义的结果. 因此,毫无疑问,3.3.2 的有效应用远不是一个简单的问题.

不过,我们还是可以举出并不十分复杂而又很有趣的例子.

3.3.3 例 考虑 Banach 空间 X 中的线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax, \tag{11}$$

其中 $A \in L(X)$ 是给定的.任给 $x \in X$,令

$$x(t) = e^{At}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n x,$$

则

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^n x = Ax(t),$$

可见 $x(t)$ 是方程(11)的解,它满足初始值条件 $x(0) = x$.讨论当 $t \to \pm\infty$ 时解 $x(t)$ 的渐近状态,是微分方程理论的重要课题.对于方程(11),此问题的解答强烈地依赖于 A 的谱性质.

假定 $\sigma(A) = \sigma_s \cup \sigma_u$,$\sigma_s$,$\sigma_u$ 皆非空且

$$\sigma_s = \{\lambda \in \sigma(A) : \mathrm{Re}\lambda < 0\};$$

$$\sigma_u = \{\lambda \in \sigma(A) : \mathrm{Re}\lambda > 0\},$$

则 σ_s,σ_u 是闭集(何故?).由 3.3.2,有分解

$$X = X_s \oplus X_u; \tag{12}$$

$$A = A_s \oplus A_u, \tag{13}$$

其中 $A_s \in L(X_s)$,$A_u \in L(X_u)$,$\sigma(A_s) = \sigma_s$,$\sigma(A_u) = \sigma_u$.令 $T = e^A$,$T_s = e^{A_s}$,$T_u = e^{A_u}$.由指数函数的性质,T,T_s,T_u 分别为 X,X_s,X_u 上的可逆算子,且 $\sigma(T_s) = \{e^\lambda : \lambda \in \sigma_s\}$,$\sigma(T_u) = \{e^\lambda : \lambda \in \sigma_u\}$.(13) 诱导出分解

$$T = T_s \oplus T_u. \tag{14}$$

为讨论 $\lim\limits_{t \to \pm\infty} e^{At}x$,考虑以下诸步骤.

1° 在 X 上定义等价范数.因 σ_s,σ_u 皆为紧集,故有 $\rho > 0$,使得

$$\beta \triangleq \sup\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in \sigma_s\} < -\rho;$$

$$\inf\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in \sigma_u\} > \rho.$$

任给 $x \in X$,以下约定:当写出分解式 $x = x_s + x_u$ 时,必定 $x_s \in X_s$,$x_u \in X_u$.今定义

$$\begin{cases} |x_s| = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\rho n} \| T_s^n x_s \|; \\ |x_u| = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\rho n} \| T_u^{-n} x_u \|; \\ |x| = \max\{|x_s|, |x_u|\}. \end{cases} \tag{15}$$

由(15)直接看出

$$\| x_s \| \leqslant |x_s| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} e^{\rho n} \| T_s^n \| \| x_s \|; \tag{16}$$

$$\| x_u \| \leqslant |x_u| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} e^{\rho n} \| T_u^{-n} \| \| x_u \|. \tag{17}$$

$\forall \lambda \in \sigma_s$，有 $|e^{\lambda}| = e^{\mathrm{Re}\lambda} \leqslant e^{\beta} < e^{-\rho}$，故 $r_\sigma(T_s) \leqslant e^{\beta}$，于是由 3.1.4 有

$$\lim_n (e^{\rho n} \| T_s^n \|)^{1/n} = e^{\rho} r_\sigma(T_s)$$

$$\leqslant e^{\rho+\beta} < 1.$$

由关于正项级数的 Cauchy 判别法，式(16) 右端之级数收敛. 同理，式(17) 右端之级数亦收敛. 于是结合(15) ~ (17) 看出 $|x|$ 是等价于 $\|x\|$ 的范数.

2° 建立不等式

$$|T_s x_s| \leqslant e^{-\rho} |x_s|, \quad |T_s^{-1} x_s| \geqslant e^{\rho} |x_s|; \tag{18}$$

$$|T_u^{-1} x_u| \leqslant e^{-\rho} |x_u|, \quad |T_u x_u| \geqslant e^{\rho} |x_u|. \tag{19}$$

事实上，由(15)有

$$|T_s x_s| = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\rho n} \| T_s^{n+1} x_s \|$$

$$= e^{-\rho} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\rho n} \| T_s^n x_s \|$$

$$\leqslant e^{-\rho} |x_s|;$$

$$|T_s^{-1} x_s| \geqslant e^{\rho} |T_s T_s^{-1} x_s| = e^{\rho} |x_s|,$$

这得出(18). 类似地，可验明(19).

3° 求 $\lim\limits_{t\to+\infty} \| e^{At} x_s \|$. 任给 $x_s \in X_s$，设 $n \leqslant t < n+1$，则

$$
\begin{aligned}
|e^{At} x_s| &= |e^{A_s t} x_s| = |T_s e^{A_s(t-1)} x_s| \\
&\leqslant e^{-\rho} |e^{A_s(t-1)} x_s| &&\text{(用(18))} \\
&\leqslant e^{-n\rho} |e^{A_s(t-n)} x_s| &&\text{(重复用(18))} \\
&\leqslant M e^{-n\rho},
\end{aligned}
$$

其中 $M = \sup\limits_{0\leqslant\tau\leqslant 1} |e^{A_s \tau} x_s| < \infty$. 这就得出 $\lim\limits_{t\to\infty} |e^{At} x_s| = 0$. 类似地，用(18) 推出

$$|e^{-At} x_s| \geqslant e^{(n+1)\rho} |e^{A_s(n+1-t)} x_s|,$$

因此当 $x_s \neq 0$ 时有 $\lim\limits_{t\to-\infty} |e^{At} x_s| = \infty$. 由范数的等价性，得到

$$
\begin{cases}
\lim\limits_{t\to\infty} \| e^{At} x_s \| = 0; \\
\lim\limits_{t\to-\infty} \| e^{At} x_s \| = \infty \quad (x_s \neq 0).
\end{cases}
\tag{20}
$$

4° 同理，由不等式(19)推出

$$
\begin{cases}
\lim\limits_{t\to\infty} \| e^{At} x_u \| = \infty \quad (x_u \neq 0); \\
\lim\limits_{t\to-\infty} \| e^{At} x_u \| = 0.
\end{cases}
\tag{21}
$$

综合(20)与(21)，看出方程(11)的解的轨道形态有如图 3-2，$x = 0$ 是一个“鞍点”. 这一结果对于无限维动力系统的研究是基本的.

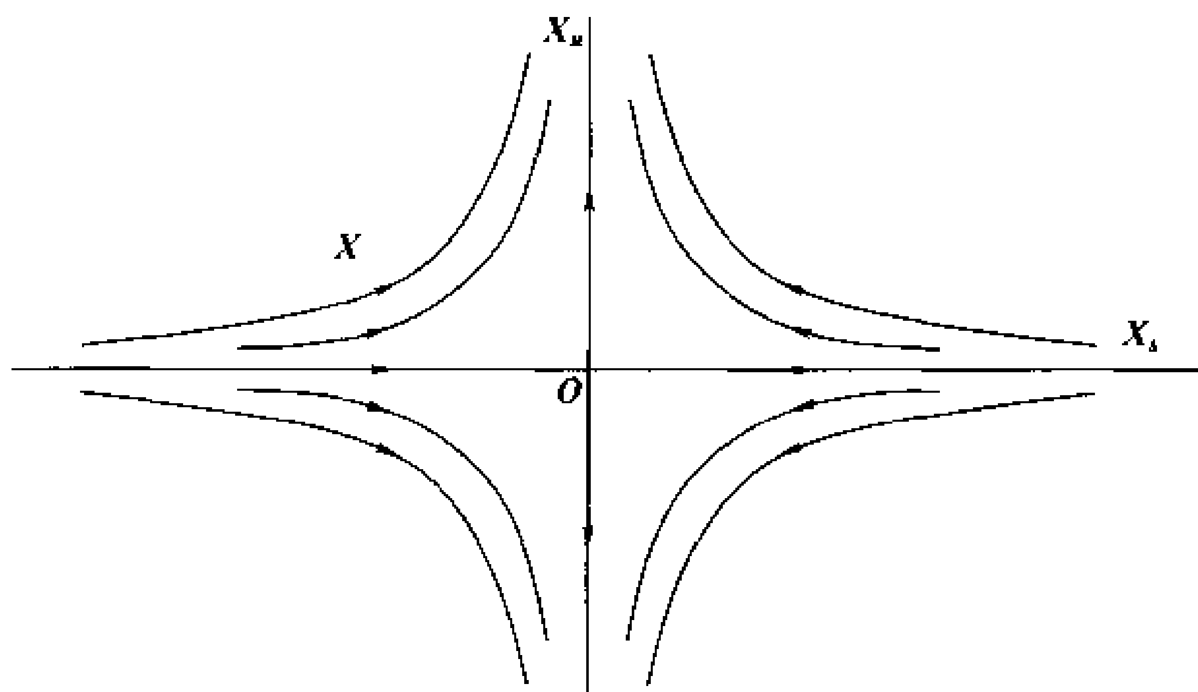


图 3－2

§3.4　紧线性算子的谱

在 §2.9 中我们已经提到,紧线性算子很接近于有限维空间上的线性算子.因此,我们自然期望,紧线性算子的谱理论更类似于矩阵的特征值理论.本节将充分地证实这一点.最主要的结论是:紧线性算子的非零谱值皆为特征值,且具有限维的特征子空间.与此相关的一系列深刻结论由 Riesz(1918) 与 Schauder(1930) 得到,因之传统上称为 Riesz-Schauder 理论,它是泛函分析中最激动人心的成果之一.

以下取定 $T \in \mathrm{CL}(X)$,不妨设 $T \neq 0$.令 $T_\lambda = \lambda I - T$,于是 $T_\lambda^* = \lambda I - T^*$ $(\lambda \in \mathbf{C})$.在给出 Riesz-Schauder 理论之前,先建立若干预备结果,其中 3.4.1 与 3.4.3 是关键性的.

3.4.1 引理　设 $T \in \mathrm{CL}(X)$,$\lambda \neq 0$,则 $R(T_\lambda)$ 是闭的.

证　不妨设 $\lambda = 1$(否则以 $\lambda^{-1}T$ 取代 T).设 $\{x_n\} \subset X$,$T_1 x_n \to x(n \to \infty)$,要证 $x \in R(T_1)$.分两种情况考虑.

1° 设 $\{x_n\}$ 有界,则由 T 的紧性不妨设 $Tx_n \to y \in X(n \to \infty)$,于是

$$\begin{aligned} x &= \lim_n T_1 x_n = \lim_n T_1(T_1 + T)x_n \\ &= T_1[\lim_n (T_1 x_n + Tx_n)] \\ &= T_1(x + y) \in R(T_1). \end{aligned}$$

2° 设 $\{x_n\}$ 无界.可设 $x_n \overline{\in} N(T_1)$(若有子列 $\{x_{n_k}\} \subset N(T_1)$,则 $x = 0 \in R(T_1)$!),因此 $d_n \triangleq d(x_n, N(T_1)) > 0$.取 $y_n \in N(T_1)$,使

$$d_n \leqslant \| x_n - y_n \| \leqslant (1 + n^{-1}) d_n, \quad n = 1,2,\cdots. \tag{1}$$

若 $\{d_n\}$ 有界,则 $\{x_n - y_n\}$ 有界,而 $T_1 x_n = T_1(x_n - y_n)$. 以 $x_n - y_n$ 取代 x_n 应用第 1° 段所证得 $x \in R(T_1)$. 若 $\{d_n\}$ 无界,则不妨设 $d_n \to \infty$. 令

$$z_n = (x_n - y_n) / \| x_n - y_n \|.$$

用(1) 得 $T_1 z_n \to 0$;不妨设 $Tz_n \to z$,于是

$$T_1 z = \lim_n T_1 T z_n = \lim_n T T_1 z_n = 0,$$

可见 $z \in N(T_1)$. 这结合不等式(1) 得

$$\begin{aligned} d_n &\leqslant \| x_n - (y_n + \| x_n - y_n \| z) \| \\ &= \| x_n - y_n \| \| z_n - z \| \\ &\leqslant (1 + n^{-1}) d_n \| z_n - z \|, \end{aligned}$$

约去 d_n 得 $1 \leqslant (1 + n^{-1}) \| z_n - z \|$. 另一方面,$z_n = (T_1 + T) z_n \to z$,得出矛盾. 可见 $\{d_n\}$ 无界的情况不会出现. □

3.4.2 引理 设 $T \in \mathrm{CL}(X)$, $N_n = N(T_1^n)$,则

$$N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_n \subset \cdots; \tag{2}$$

且(2)中必有某个包含为等式.

证 直接由 $T_1^{n+1} N_n = T_1 T_1^n N_n = \{0\}$ 得出

$$N_n \subset N_{n+1}, \quad n = 1,2,\cdots.$$

若以上包含全为真包含,则由 Riesz 引理(1.5.7) 有 $x_n \in N_n$,使得

$$\| x_n \| = 1, d(x_n, N_{n-1}) \geqslant 1/2, \quad n = 2,3,\cdots.$$

若 $n > m$,则

$$T_1^{n-1}(T_1 x_n + T x_m) = T_1^n x_n + T T_1^{n-1} x_m = 0,$$

故 $T_1 x_n + T x_m \in N_{n-1}$. 于是

$$\begin{aligned} \| T x_n - T x_m \| &= \| x_n - (T_1 x_n + T x_m) \| \\ &\geqslant d(x_n, N_{n-1}) \geqslant 1/2 (n > m), \end{aligned}$$

这与 $\{T x_n\}$ 含收敛子列相矛盾. 因此(2) 中必有某个包含是等式. □

3.4.3 引理 设 $T \in \mathrm{CL}(X)$, $\lambda \neq 0$,则

$$R(T_\lambda) = X \Leftrightarrow N(T_\lambda) = \{0\} \Leftrightarrow \lambda \in \rho(T).$$

证 不妨设 $\lambda = 1$,且仍记 $N_n = N(T_1^n)$. 只需证 $R(T_1) = X \Leftrightarrow N_1 = \{0\}$.

首先设 $R(T_1) = X$. 若 $N_1 \neq \{0\}$,则有 $0 \neq x \in N_1$. 由 $R(T_1) = X$,可取 $x_1 \in X$ 使 $x = T_1 x_1$;进而又有 $x_1 = T_1 x_2, \cdots, x_n = T_1 x_{n+1}, \cdots$. 这就得到

$$0 \neq x = T_1 x_1 = T_1^2 x_2 = \cdots = T_1^n x_n = \cdots;$$

$$T_1^n x_n \neq 0, T_1^{n+1} x_n = T_1 x = 0 \quad (n = 1,2,\cdots).$$

这表明 $x_n \in N_{n+1} \setminus N_n (n = 1,2,\cdots)$,因而(2) 中所有包含为真包含,这与 3.4.2

相矛盾. 因此 $N_1 = \{0\}$.

反之,若 $N_1 = \{0\}$,则 T_1 是单射. 因 $R(T_1)$ 是闭的(3.4.1),故 $T_1^{-1}: R(T_1) \to X$ 有界(2.3.3),因而由 2.8.5 有 $R(T_1^*) = X^*$. 将证明的前半部分用到紧算子 T^*(参看 2.9.7) 得出 $N(T_1^*) = \{0\}$;然后用 2.8.4 得

$$R(T_1) = \overline{R(T_1)} = {}^{\perp}N(T_1^*) = X. \qquad \square$$

下面这个引理是纯代数性质的,它用于 3.4.5 之证明.

3.4.4 引理 设 $T \in L(X)$,$\lambda_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是 T 的互异特征值,$0 \neq x_i \in N(\lambda_i I - T)$,则 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 线性无关.

证 用归纳法,设 $\{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}$ 线性无关. 若

$$x \triangleq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0, \tag{3}$$

则

$$(\lambda_n I - T)x = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(\lambda_n - \lambda_i)x_i = 0,$$

这推出 $\alpha_i(\lambda_n - \lambda_i) = 0 (1 \leqslant i < n)$,从而 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$,以此代入式(3)后得 $\alpha_n = 0$. 因此 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 线性无关. $\square$

下面给出本节的主要结果 3.4.5~3.4.8,它们统称为 **Riesz-Schauder 理论**[①].

第一个定理阐明了紧线性算子谱的特殊性质.

3.4.5 定理 设 $T \in CL(X)$,则 $\sigma(T)$ 是无非零聚点的可数集;当 $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$ 时 $\lambda \in \sigma_p(T)$,$\dim N(T_\lambda) < \infty$;若 $\dim X = \infty$,则 $0 \in \sigma(T)$.

证 证明分以下三步进行.

1° 设 $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$,则由 3.4.3 有 $N(T_\lambda) \neq \{0\}$,因此 $\lambda \in \sigma_p(T)$. 因特征子空间 $N(T_\lambda)$ 中的单位球

$$\begin{aligned} B_1(0) \cap N(T_\lambda) &= \{x \in B_1(0) : \lambda x = Tx\} \\ &= \{x \in B_1(0) : x = T(x/\lambda)\} \\ &\subset TB_r(0), r = 1/|\lambda|, \end{aligned}$$

而 $TB_r(0)$ 相对紧(参看 §2.9),故 $\dim N(T_\lambda) < \infty$(1.5.8).

2° 设 λ 是 $\sigma(T)$ 的聚点. 取 $\{\lambda_n\} \subset \sigma(T)$,使 $\lambda_n \to \lambda$,可设 λ_n 互不相同且 $\lambda_n \neq 0 (n = 1, 2, \cdots)$. 令 $T_n = \lambda_n I - T$,取 $0 \neq x_n \in N(T_n)(n = 1, 2, \cdots)$,则 $\{x_n\}$ 线性无关(3.4.4). 令 $X_n = \mathrm{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$,则由 Riesz 引理(1.5.7)有 $y_n \in X_n$,使得

---

① 一些泛函分析著作将 Riesz-Schauder 理论综合在一个大定理中,这有利于总观其全貌,但对初学者未必相宜.

$$\| y_n \| = 1, d(y_n, X_{n-1}) \geqslant 1/2, \quad n = 2,3,\cdots.$$

令 $y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ni} x_i$，则当 $n > m$ 时有

$$T_n y_n + T y_m = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ni}(\lambda_n - \lambda_i) x_i + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{mi} \lambda_i x_i \in X_{n-1};$$

$$\begin{aligned} \| T y_n - T y_m \| &= |\lambda_n| \, \| y_n - \lambda_n^{-1}(T_n y_n + T y_m) \| \\ &\geqslant |\lambda_n| d(y_n, X_{n-1}) \geqslant |\lambda_n| / 2. \end{aligned}$$

因 $\{T y_n\}$ 含收敛子列，故必 $\lambda_n \to 0$. 因此 $\sigma(T)$ 无非零聚点. 这又推出，$\forall n \in \mathbf{N}$，

$$\{\lambda \in \sigma(T) : 1/n \leqslant |\lambda| \leqslant n\}$$

是有限集，因此 $\sigma(T)$ 是可数集.

3° 若 $\dim X = \infty$，则由 2.9.5 知 T 不可逆，因此 $0 \in \sigma(T)$. □

以下两个定理涉及紧线性算子的特征子空间及其维数，它们是矩阵理论中熟知结果的完美推广.

3.4.6 定理　设 $T \in \mathrm{CL}(X)$，$0 \neq \lambda \in \sigma(T)$，则存在 $r \geqslant 1$，使得

$$N(T_\lambda) \subset N(T_\lambda^2) \subset \cdots \subset N(T_\lambda^r) = N(T_\lambda^k)(k \geqslant r); \tag{4}$$

$$R(T_\lambda) \supset R(T_\lambda^2) \supset \cdots \supset R(T_\lambda^r) = R(T_\lambda^k)(k \geqslant r); \tag{5}$$

$$X = N(T_\lambda^r) \oplus R(T_\lambda^r)(\text{拓扑直和}), \tag{6}$$

(4)与(5)中的包含皆为真包含，且 $\dim N(T_\lambda^r) < \infty$.

3.4.7 定理　设 $T \in \mathrm{CL}(X)$，$0 \neq \lambda \in \sigma(T)$，则

$$\dim N(T_\lambda) = \dim(T_\lambda^*). \tag{7}$$

若 $\lambda \neq \mu$，则 $N(T_\lambda) \subset {}^\perp N(T_\mu^*)$.

定理 3.4.6 ~ 3.4.8 的证明较长，放在 §3.7 中.

类比于矩阵理论，(4) 中的 $N(T_\lambda^r)$ 称为 T 关于特征值 λ 的**根子空间**，记为 X_λ，可将它表为不显含 r 的形式：

$$X_\lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} N(T_\lambda^k).$$

$\dim N(T_\lambda)$ 与 $\dim N(T_\lambda^r)$ 分别相当于线性代数中特征值 λ 的“几何重数”与“代数重数”.

若 $0 \neq \lambda \in \mathbf{C}$，$y \in X$，$v \in X^*$，则以下四个方程

$$\lambda x - Tx = y, \tag{8}$$

$$\lambda x - Tx = 0, \tag{9}$$

$$\lambda u - T^* u = v, \tag{10}$$

$$\lambda u - T^* u = 0 \tag{11}$$

之间存在极具规则性的联系，这种联系最初由 Fredholm 在研究线性积分方程时发现(1903)，后来由 Riesz 提炼成一个抽象理论(1918)，主要结论综合在以下定理

中.

3.4.8 定理 设 $T \in \mathrm{CL}(X)$, $\lambda \neq 0$,则以下结论成立:

(i) 方程(8)有解 $x \in X \Leftrightarrow$ 对方程(11)的任何解 $u \in X^*$ 有 $u(y) = 0$;因此,若(11)仅有零解,则对任何 $y \in X$ 方程(8)恒有解.

(ii) 方程(10)有解 $u \in X^* \Leftrightarrow$ 对方程(9)的任何解 $x \in X$ 有 $v(x) = 0$;因此,若(9)仅有零解,则对任何 $v \in X^*$ 方程(10)恒有解.

(iii) 对任何 $y \in X$ 方程(8)恒有解 $\Leftrightarrow$ 方程(9)仅有零解,此时 $x = T_\lambda^{-1}y$ 是(8)的唯一解.

(iv) 对任何 $v \in X^*$ 方程(10)恒有解 $\Leftrightarrow$ 方程(11)仅有零解,此时 $u = (T_\lambda^*)^{-1}v$ 是(10)的唯一解.

若取 $X = L^2(J)$(或 $C(J)$), $J = [a,b]$ $(a < b)$,

$$(Tu)(x) = \int_a^b K(x,y)u(y)\mathrm{d}y, \tag{12}$$

其中 $K(\cdot,\cdot) \in L^2(J \times J)$(或 $K(\cdot,\cdot) \in C(J \times J)$),则方程(8)～(11)正是Fredholm等人系统地研究过的线性积分方程.例如,方程(8)(9)现在写成:

$$\lambda u(x) - \int_a^b K(x,y)u(y)\mathrm{d}y = v(x); \tag{13}$$

$$\lambda u(x) - \int_a^b K(x,y)u(y)\mathrm{d}y = 0. \tag{14}$$

由 2.9.3,

$$K(\cdot,\cdot) \in L^2(J \times J) \Rightarrow T \in \mathrm{CL}(L^2(J)),$$
$$K(\cdot,\cdot) \in C(J \times J) \Rightarrow T \in \mathrm{CL}(C(J)).$$

因此,可应用3.4.8.例如,由3.4.8(iii)得出:对任何 $v \in L^2(J)$(或 $v \in C(J)$)方程(13)恒有解 $u \in L^2(J)$(或 $u \in C(J)$) $\Leftrightarrow$ 方程(14)仅有零解.这一结论的意义在于,它将判定方程(13)可解性的问题转化为判定方程(14)的解为零的问题,后者往往要容易得多.试看一简单例子.

3.4.9 例 考虑积分方程

$$\lambda u(x) - \int_0^1 u(y)\mathrm{d}y = v(x) \tag{15}$$

与

$$\lambda u(x) - \int_0^1 u(y)\mathrm{d}y = 0. \tag{16}$$

设 $\lambda \neq 0$.方程(16)显然只能有常数解: $u(x) \equiv a$,代入(16)得

$$\lambda a - a = 0, \quad \lambda \neq 1 \Rightarrow a = 0.$$

可见,当 $\lambda \neq 1$ 时方程(16)仅有零解,于是对任何 $v \in L^2(J)$(或 $v \in C(J)$),方程(15)有解 $u \in L^2(J)$(或 $u \in C(J)$),这个解就是

$$u(x) = \lambda^{-1}[a + v(x)] \quad (x \in J). \tag{17}$$

以(17)代入方程(15)解出

$$a = \frac{1}{\lambda - 1}\int_0^1 v(x)\mathrm{d}x,$$

于是当 $\lambda \neq 1$ 时方程(15)有解

$$u(x) = \frac{1}{\lambda}\left[v(x) + \frac{1}{\lambda - 1}\int_0^1 v(y)\mathrm{d}y\right](x \in J).$$

§3.5　Hilbert 空间上的有界线性算子

如所熟知,矩阵理论中最富有成果的一些内容,密切联系着内积、正交性等概念;这部分内容的无限维推广,自然涉及 Hilbert 空间上的线性算子.实际上,线性算子谱论中最精致最优美的部分,正是关于 Hilbert 空间上的线性算子的.为介绍这一理论的某些初等部分,本节给出 Hilbert 空间上线性算子的若干基本概念.

以下设 X 是给定的复 Hilbert 空间.如§3.1所指出的,在 $L(X)$ 中有两种互相联系的运算:线性运算与乘法.对于 X 是 Hilbert 空间这一特殊情况,可增加一种新的运算:

$$* : L(X) \to L(X), T \to T^*, \tag{1}$$

正是这一个新运算的加入导致一个更丰富的理论. T^* 的定义如下.

3.5.1 定义　任给 $T \in L(X)$,由恒等式

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle \quad (x, y \in X) \tag{2}$$

决定一个算子 $T^* \in L(X)$,称它为 T 的**相伴算子**①.

以上定义包含了一些并非自明的结论: T^* 由(2)完全确定,且确有 $T^* \in L(X)$.现说明如下.取定 $y \in X$,令

$$u_y(x) = \langle Tx, y\rangle \quad (x \in X),$$

则直接看出 $u_y \in X^*$,且 $\| u_y \| \leqslant \| T \| \| y \|$.由 Riesz 表示定理,有由 y 唯一决定的 $T^* y \in X$,使得等式(2)成立,且 $\| T^* y \| = \| u_y \|$.这就得到一个确定的算子 $T^* : X \to X, y \to T^* y$. $\forall x, y, z \in X, \alpha, \beta \in \mathbf{C}$,由(2)有

$$\begin{aligned}\langle x, T^*(\alpha y + \beta z)\rangle &= \langle Tx, \alpha y + \beta z\rangle = \bar{\alpha}\langle Tx, y\rangle + \bar{\beta}\langle Tx, z\rangle \\ &= \bar{\alpha}\langle x, T^* y\rangle + \bar{\beta}\langle x, T^* z\rangle \\ &= \langle x, \alpha T^* y + \beta T^* z\rangle,\end{aligned}$$

故得 $T^*(\alpha y + \beta z) = \alpha T^* y + \beta T^* z$,因此 T^* 是线性的.由

---

① 在 Hilbert 空间中,相伴算子与对偶算子不尽相同,因而使用同一记号确有混淆之虞.不过(2)与§2.8(2)确实高度类似,适当利用这种类似不无益处.

$$\| T^* y \| = \| u_y \| \leqslant \| T \| \| y \|$$

可见 T^* 有界.这样,定义3.5.1的合法性得到证实.

现在看几个实例,借以获得对自伴算子的某些直观印象.

3.5.2 例 1° 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbf{C}^{n\times n}$,则 $\forall x, y \in \mathbf{C}^n$,有

$$\begin{aligned}\langle Ax, y\rangle &= \sum_i \Big(\sum_j a_{ij}x_j\Big)\bar{y}_i \\ &= \sum_j x_j \overline{\sum_i \bar{a}_{ij} y_i} \\ &= \sum_i x_i \overline{\sum_j \bar{a}_{ji} y_j} = \langle x, A^* y\rangle,\end{aligned}$$

其中 $A^* = (\bar{a}_{ji}) \in \mathbf{C}^{n\times n}$.可见,$A^*$ 原不过是 A 的"共轭转置",即 $A^* = \bar{A}^{\mathrm{T}}$.在 l^2 中有类似的结论(对照2.8.2).

2° 设 $J = [a,b]\,(a<b)$,$K(\cdot,\cdot) \in L^2(J\times J)$,$T$ 是以 K 为核的积分算子,则 $T \in L(L^2(J))$(参看2.2.3).$\forall u, v \in L^2(J)$,有

$$\begin{aligned}\langle Tu, v\rangle &= \int_a^b \overline{v(x)}\mathrm{d}x \int_a^b K(x,y)u(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b u(y)\mathrm{d}y \int_a^b K(x,y)\overline{v(x)}\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b u(x)\mathrm{d}x \overline{\int_a^b \overline{K(y,x)}v(y)\mathrm{d}y} \quad (x,y\text{ 换位}) \\ &= \langle u, T^* v\rangle.\end{aligned}$$

可见,T^* 正是以 $\overline{K(y,x)}$ 为核的积分算子,$\overline{K(y,x)}$ 可看作 $K(x,y)$ 的"共轭转置".

若将"取相伴"看作一种运算,则导致考虑映射(1),今将其基本性质综合于下(对照2.8.3!).

3.5.3 命题 对任给 $T, S \in L(X)$,$\alpha, \beta \in \mathbf{C}$,成立以下等式:

$$(\alpha T + \beta S)^* = \bar{\alpha}T^* + \bar{\beta}S^*; \tag{3}$$

$$(TS)^* = S^* T^*,\ (T^n)^* = (T^*)^n; \tag{4}$$

$$(T^{-1})^* = (T^*)^{-1} \quad (\text{若 } T \text{ 可逆}); \tag{5}$$

$$T^{**} = T; \tag{6}$$

$$\| T^* \| = \| T \|; \tag{7}$$

$$\| T \|^2 = \| TT^* \| = \| T^* T \|. \tag{8}$$

证 直接利用恒等式(2)即可验证等式(3),(4),(6).例如,由

$$\begin{aligned}\langle x, T^{**}y\rangle &= \langle T^* x, y\rangle = \overline{\langle y, T^* x\rangle} \\ &= \overline{\langle Ty, x\rangle} = \langle x, Ty\rangle\ (\forall x, y \in X)\end{aligned}$$

即得 $T^{**} = T$.因显然有 $I^* = I$,故用(4)于 $TT^{-1} = T^{-1}T = I$,得

$$(T^{-1})^* T^* = T^*(T^{-1})^* = I,$$

这得出(5). 为证(7),我们利用(参考 §2.4(1) 与 2.4.3)

$$\|y\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x,y\rangle| = \sup_{\|x\|=1} |\langle y,x\rangle|. \tag{9}$$

结合(9)与§2.1(4),有

$$\begin{aligned}\|T^*\| &= \sup_{\|y\|=1} \|T^* y\| \\ &= \sup_{\|y\|=1} \sup_{\|x\|=1} |\langle x, T^* y\rangle| \\ &= \sup_{\|y\|=1} \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, y\rangle| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \|T\|.\end{aligned}$$

对于(8),首先由

$$\begin{aligned}\|T^* T\| &\leqslant \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2 \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, Tx\rangle \\ &= \sup_{\|x\|=1} \langle x, T^* Tx\rangle \leqslant \|T^* T\|\end{aligned}$$

得 $\|T^* T\| = \|T\|^2$;其次有

$$\|TT^*\| = \|T^{**} T^*\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2. \qquad \square$$

性质(3)(6)(7)表示映射(1)是一个等距的共轭同构,它以自身为其逆映射. 利用 3.5.3,可将某些有关算子的结论转移到其相伴算子. 例如,若已知依算子范数有 $T_n \to T$,则立得 $T_n^* \to T^*$;若 $TS = ST$,则 $T^* S^* = S^* T^*$,等等.

Hilbert 空间中许多重要类型的算子是通过相伴算子来界定的,其主要者如下.

3.5.4 定义 设 $T \in L(X)$. 若 $TT^* = T^* T$,则称 T 为**正规算子**;若 $T = T^*$,则称 T 为**自伴算子**;若 $TT^* = T^* T = I(\Leftrightarrow T^* = T^{-1})$,则称 T 为 **U 算子**;若 $T = T^* = T^2$,则称 T 为**正投影算子**.

由定义直接看出,正投影算子是自伴算子,而自伴算子与 U 算子都是正规算子. 上述几种算子的直观意义如何,则尚不清楚. 下面的命题有助于回答这一问题.

3.5.5 命题 设 $T \in L(X)$,则以下结论成立:

(i) T 是正规算子 $\Leftrightarrow \|Tx\| = \|T^* x\| (\forall x \in X)$.

(ii) T 是自伴算子 $\Leftrightarrow \langle Tx, x\rangle \in \mathbf{R} (\forall x \in X)$.

(iii) T 是 U 算子 $\Leftrightarrow T: X \to X$ 是等距同构.

(iv) T 是正投影算子 $\Leftrightarrow$ 存在正交分解 $X = A \oplus A^{\perp}$,A 是 X 的闭子空间,T 是从 X 到 A 的投影算子.

证 首先给出易直接验证的以下恒等式:

$$4\langle Tx, y\rangle = \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle$$

$$+ \mathrm{i}\langle T(x+\mathrm{i}y), x+\mathrm{i}y\rangle$$
$$- \mathrm{i}\langle T(x-\mathrm{i}y), x-\mathrm{i}y\rangle. \tag{10}$$

(10)的意义在于：T 完全由"二次函数"$x \to \langle Tx, x\rangle (x \in X)$ 所决定.事实上,若 $\langle Tx, x\rangle \equiv 0 (x \in X)$,则由(10)推出 $\langle Tx, y\rangle \equiv 0 (x, y \in X)$,因而 $Tx \equiv 0$,即 $T = 0$.由此又推出:若 $\langle Tx, x\rangle \equiv \langle Sx, x\rangle (x \in X)$,则 $T = S$.

利用以上结论,有

$$\begin{aligned} TT^* = T^*T &\Leftrightarrow \langle TT^*x, x\rangle \equiv \langle T^*Tx, x\rangle \\ &\Leftrightarrow \langle T^*x, T^*x\rangle \equiv \langle Tx, Tx\rangle \qquad (\text{用(2)}) \\ &\Leftrightarrow \| T^*x \| \equiv \| Tx \| (x \in X), \end{aligned}$$

这得出结论(i).其次,

$$\begin{aligned} T = T^* &\Leftrightarrow \langle Tx, x\rangle \equiv \langle T^*x, x\rangle \\ &\Leftrightarrow \langle Tx, x\rangle \equiv \overline{\langle Tx, x\rangle} \qquad (\text{用(2)}) \\ &\Leftrightarrow \langle Tx, x\rangle \in \mathbf{R} \quad (\forall x \in X), \end{aligned}$$

这得出结论(ii).类似地,

$$\begin{aligned} TT^* = T^*T = I &\Leftrightarrow \| Tx \| \equiv \| T^*x \| \equiv \| x \| \text{ 且 } R(T) = X \\ &\Leftrightarrow T \text{ 是等距同构}, \end{aligned}$$

这得出结论(iii).

最后证(iv).首先设 $T^2 = T = T^*$.令 $A = R(T), B = R(I - T)$,则直接看出 $X = A + B$.$\forall x, y \in X$,有

$$\begin{aligned} \langle Tx, y - Ty\rangle &= \langle Tx, y\rangle - \langle Tx, Ty\rangle \\ &= \langle Tx, y\rangle - \langle T^2x, y\rangle = 0, \end{aligned}$$

可见 $B \subset A^{\perp}$.因 $A = N(I - T)$ 是闭子空间,故有 $X = A \oplus A^{\perp}$(参考1.7.7),因而 $B = A^{\perp}$,T 是从 X 到 A 的投影算子.

反之,若 $X = A \oplus A^{\perp}$,A 是 X 的闭子空间,T 是从 X 到 A 的投影,则直接看出 $T^2 = T$.其次,由

$$\begin{aligned} \langle Tx, y\rangle &= \langle Tx, y - Ty\rangle + \langle Tx, Ty\rangle \\ &= \langle Tx, Ty\rangle = \langle Tx - x, Ty\rangle + \langle x, Ty\rangle \\ &= \langle x, Ty\rangle \quad (\forall x, y \in X) \end{aligned}$$

推出 $T = T^*$. □

3.5.6 例 **1°** 设 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$.结合3.5.2之1°与3.5.4得出:$A$ 依3.5.4是正规的、自伴的、是U算子分别相当于 A 是正规矩阵、Hermite对称矩阵与U矩阵.

2° 若 T 如3.5.2之2°,则 $T = T^* \Leftrightarrow K(x, y) = \overline{K(y, x)}$;当 K 是实函数时这意味着 $K(x, y)$ 是对称函数.

3° 设 $a \in \mathbf{R}$ 是固定的,定义位移算子

$$\tau_a : L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R}), u(x) \to u(x + a).$$

直接看出 τ_a 是一个等距同构,因此是U算子(3.5.5(iii)).这一结论亦可直接验证如下:$\forall u, v \in L^2(\mathbf{R})$,有

$$\langle \tau_a u, v\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(x+a)\overline{v(x)}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\overline{v(x-a)}\mathrm{d}x = \langle u, \tau_a^* v\rangle,$$

可见 $(\tau_a^* v)(x) = v(x-a)$,这表明 $\tau_a^* = \tau_a^{-1}$.

3.5.4 中定义的算子,必然具有某些特殊的谱性质,这些性质是关于矩阵特征值性质的某些熟知结论的推广.下面仅给出若干基本性质,更深入的结论放在下节.首先指出一简单事实:任给 $\lambda \in \mathbf{C}, T \in L(X)$,有 $\lambda I - T$ 可逆 $\Leftrightarrow \bar{\lambda} I - T^*$ 可逆,因此 $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$,或简写作

$$\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)} \triangleq \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}. \tag{11}$$

3.5.7 定理 设 $T \in L(X)$.

(i) 若 T 是正规算子,则 $r_\sigma(T) = \|T\|$.

(ii) 若 T 是自伴算子,则 $\sigma(T) \subset \mathbf{R}$.

(iii) 若 T 是U算子,则 $\sigma(T) \subset S^1 \triangleq \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| = 1\}$.

证 (i) 利用(8)及 $TT^* = T^*T$,有

$$\|T\|^4 = \|T^*T\|^2 = \|(T^*T)^*T^*T\| = \|T^*TT^*T\|$$

$$= \|(T^2)^*T^2\| = \|T^2\|^2,$$

故得 $\|T^2\| = \|T\|^2$.进而归纳地得出 $\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}$.于是,由谱半径公式(3.1.4)有

$$r_\sigma(T) = \lim_n \|T^{2^n}\|^{1/2^n} = \|T\|.$$

(ii) 任取 $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta \in \sigma(T), \alpha, \beta \in \mathbf{R}$,今证 $\beta = 0$. $\forall t \in \mathbf{R}$,有 $\alpha + \mathrm{i}(\beta + t) \in \sigma(T + \mathrm{i}tI)$(用3.2.3),于是

$$\begin{aligned}
\alpha^2 + (\beta+t)^2 &= |\alpha + \mathrm{i}(\beta+t)|^2 \\
&\leqslant [r_\sigma(T + \mathrm{i}tI)]^2 \\
&\leqslant \|T + \mathrm{i}tI\|^2 && (\S 3.1(18)) \\
&= \|(T + \mathrm{i}tI)(T + \mathrm{i}tI)^*\| && (\text{用}(8)) \\
&= \|T^2 + t^2 I\| \\
&\leqslant \|T\|^2 + t^2,
\end{aligned}$$

这推出

$$2\beta t \leqslant \|T\|^2 - \alpha^2 - \beta^2.$$

要使以上不等式对任何 $t \in \mathbf{R}$ 成立,必须 $\beta = 0$.因此 $\sigma(T) \subset \mathbf{R}$.

(iii) 首先,由(7)(8)及 $T^*T = I$ 推出 $\|T\| = \|T^*\| = 1$. $\forall \lambda \in \sigma(T)$,

有

$$|\lambda| \leqslant r_\sigma(T) = \|T\| = 1.$$

另一方面，从 $\lambda^{-1} \in \sigma(T^{-1}) = \sigma(T^*)$（用 3.2.3）得

$$1/|\lambda| \leqslant r_\sigma(T^*) = \|T^*\| = 1,$$

故 $|\lambda| \geqslant 1$，从而 $|\lambda| = 1$. □

由 3.5.7 特别得出：Hermite 对称矩阵有实特征值；U 矩阵的特征值有绝对值 1，等等. 这些在线性代数中是熟知的.

最后建立一个关于双线性泛函的定理，它在 Hilbert 空间线性算子理论中作用颇大.

3.5.8 Lax-Milgram 定理 设 $\varphi : X \times X \to \mathbf{C}$ 满足条件：

(i) $\varphi(x,y)$ 对 x 是线性的，对 y 是共轭线性的；

(ii) $M \triangleq \sup\limits_{\|x\| = \|y\| = 1} |\varphi(x,y)| < \infty$,

则存在唯一 $T \in L(X)$，使得 $\|T\| = M$ 且

$$\varphi(x,y) = \langle Tx, y\rangle \quad (x, y \in X). \tag{12}$$

若进而假定条件

(iii) $\delta \triangleq \inf\limits_{\|x\|=1} |\varphi(x,x)| > 0$

满足，则 T 是可逆算子.

证 $\forall x \in X$，令 $u_x(y) = \overline{\varphi(x,y)}$，则 u_x 是 X 上的线性泛函. 易见条件(ii)推出

$$|\varphi(x,y)| \leqslant M\|x\|\|y\| \quad (\forall x, y \in X). \tag{13}$$

因此 $u_x \in X^*$ 且 $\|u_x\| \leqslant M\|x\|$. 由 Riesz 表示定理，有唯一的元 $Tx \in X$，使

$$\langle Tx, y\rangle = \overline{\langle y, Tx\rangle} = \overline{u_x(y)} = \varphi(x,y), \quad y \in X.$$

这就得到算子 $T : X \to X$，它满足恒等式(12). 易见 T 为线性算子，且

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \sup_{\|y\|=1} |\langle Tx, y\rangle|$$
$$= \sup_{\|x\| = \|y\| = 1} |\varphi(x,y)| = M.$$

因算子 T 由 $\langle Tx, x\rangle \equiv \varphi(x,x)$ 唯一决定（参看 3.5.5 之证），故满足(12)的 T 是唯一的.

若条件(iii)满足，则 $\forall x \in X$ 有

$$\delta\|x\|^2 \leqslant |\varphi(x,x)| = |\langle Tx, x\rangle| \leqslant \|Tx\|\|x\|,$$

这推出 $\|Tx\| \geqslant \delta\|x\|$ $(\forall x \in X)$. 因此 $T : X \to R(T)$ 为拓扑同构，$R(T)$ 是 X 的闭子空间. $\forall x \in R(T)^\perp$，由

$$\delta\|x\|^2 \leqslant |\langle Tx, x\rangle| = 0$$

得 $x = 0$，可见 $R(T)^\perp = \{0\}$. 这推出 $R(T) = X$，因此 $T \in GL(X)$.

2. 用$(T+S)^{-1} = T^{-1}(I+ST^{-1})^{-1}$及 3.1.1 展开$(T+S)^{-1}$.

3. 利用 §3.1(12).

4. 用谱半径公式指明 $r_\sigma(TS) \leqslant r_\sigma(ST)$,注意$(TS)^n = T(ST)^{n-1}S$.

5. 用谱半径公式,注意$(TS)^n = T^nS^n$.

6. 注意 $\sigma(T) = \{0\} \Leftrightarrow r_\sigma(T) = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbf{C}: \sum(\lambda T)^n$ 收敛(3.1.5).

7. 验证 $Tx = 0 \Rightarrow x = 0; \lambda \neq 0, Tx = \lambda x \Rightarrow x = 0$.

8. $Tx = \lambda x \Leftrightarrow x_i = \lambda^{i-1}x_1; N(T_\lambda) \neq \{0\} \Leftrightarrow |\lambda| < 1. \|T\| \leqslant 1 \Rightarrow$ 当$|\lambda| > 1$时 $\lambda \in \rho(T)$.

9. 取可数集$\{\alpha_i\} \subset \sigma$,使$\overline{\{\alpha_i\}} = \sigma$,令 $Tx = (\alpha_i x_i)$,则 $T \in L(l^1), \sigma(T) = \sigma$.

10. $\lambda \overline{\in} [0,1] \Rightarrow \lambda \in \rho(T); \lambda \in [0,1] \Rightarrow R(T_\lambda) \neq C[0,1]; xu(x) \equiv \lambda u(x) \Rightarrow u(x) \equiv 0$.

11. $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow [\lambda - \varphi(x)]u(x) = v(x) \in C(J)$ 不总有解 $u \Leftrightarrow \lambda \in \varphi(J)$.

12. 验证 $\|T^n\| \leqslant (b-a)^n/n!$,因而 $r_\sigma(T) = 0, \sigma(T) = \{0\}$.

13. $u = (I - \lambda T)^{-1}v = \sum_0^\infty \lambda^n T^n v$, T 依题 12.

14. $\forall y \in N \triangleq N(\lambda I - T)$,当 $\tau \neq \lambda$ 时,$(\tau I - T)x = y$ 有唯一解

$$x = \frac{y}{\tau - \lambda} \in N, \sigma(T|N) = \{\lambda\}.$$

15. 否则 $\exists \varepsilon > 0, T_n \in L(X), \lambda_n \in \sigma(T_n)$,使 $\|T_n - T\| \to 0, d(\lambda_n, \sigma(T)) \geqslant \varepsilon$.不妨设 $\lambda_n \to \lambda$,则 $\lambda \in \rho(T)$,当 n 充分大时 $\lambda_n I - T_n$ 可逆!

16. 易见 $\sigma(T^*) \subset \sigma(T), \sigma(T^{**}) \subset \sigma(T^*), \rho(T^*) \subset \rho(T^{**})$. 若 $\lambda \in \rho(T^*)$,则 T_λ^{**} 可逆,因而 $N(T_\lambda) = \{0\}, R(T_\lambda) = \overline{R(T_\lambda)} = {}^\perp N(T_\lambda^*) = X$,故 $\lambda \in \rho(T)$.

17. 取定 $T \in L(X)$,使 $\lambda \in \rho(T)$,则当 $S \in L(X)$, $\|S\|$ 充分小时,可用题 2 的解法估计 $\|R(\lambda, T+S) - R(\lambda, T)\|$.

18. 验证 $f(T)(\lambda I - T) = (\lambda I - T)f(T) = I$.

19. 注意 $\tau(\lambda - \tau)^{-1} = (\lambda - \tau)^{-1}\tau$,用 3.2.2 及题 18.

20. 注意$(\lambda - \tau)^{-1}(\mu - \tau)^{-1} = (\mu - \tau)^{-1}(\lambda - \tau)^{-1}$.

21. 以 $T - S = R(\lambda, S)^{-1} - R(\lambda, T)^{-1}$ 代入.

22. 用谱映射定理及题 18.

23. 注意$[\mu - (\lambda - \tau)^{-1}]^{-1} = \mu^{-1} + \mu^{-2}(\lambda - \mu^{-1} - \tau)^{-1}$ 并用 3.2.2 及题 18.

24. 用谱映射定理:$f(\sigma(T)) = \sigma(f(T)) = \sigma(0) = \{0\}$.

25. $f(T)$ 可逆 $\Leftrightarrow 0 \overline{\in} \sigma(f(T))$,用谱映射定理.

26. 注意 $R(\tau, T)x = R(\tau, T)\dfrac{(\tau I - T)x}{\tau - \lambda} = \dfrac{x}{\tau - \lambda}$,然后用 §3.2(5).

27. $\lambda I - T = (\lambda I - T_1) \oplus (\lambda I - T_2) \Rightarrow \rho(T) = \rho(T_1) \cap \rho(T_2)$.

28. $\lambda I - T$ 可逆 $\Rightarrow \lambda I - T: A \to A$ 与 $\lambda I - T: B \to B$ 皆可逆.

29. $TSN(T) = STN(T) = \{0\}; SR(T) = STX = TSX \subset R(T)$.

30. $A = \{u \in C(J): u(a) = 0\}$ 即是.

31. $Tx = \lambda x \Rightarrow x_{i+1} = i!\lambda^i x_1; \sigma(T) = \sigma_p(T) = \{0\}$.

32. $\sigma(T) = \{0, 1, 1/2, \cdots, 1/i, \cdots\}, \sigma_p(T) = \{1, 1/2, \cdots, 1/i, \cdots\}$.

33. 注意 $\sigma(T) = [0,1]$ 并用 3.4.5.

34. 指明 $N(T_1) = N(T_1^2) = \mathbf{C}x_0$,因此 $N(T_1^k) = \mathbf{C}x_0 (k \geqslant 1)$.

35. 令 $(Tu)(x) = \int_0^1 e^{x-y} u(y) dy$,则 $\sigma(T) = \{0,1\}$,当 $\lambda \neq 1$ 时原方程有唯一解.

36. $x + T^*Tx = 0 \Rightarrow \|x\|^2 + \|Tx\|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.

37. $x = Tx \Rightarrow \|x - T^*x\|^2 \leqslant 0$.

38. $y \in R(T)^\perp \Rightarrow m\|y\|^2 \leqslant \langle Ty, y\rangle = 0$.

39,40. 直接验证正规算子之条件(见 3.5.4).

41. 用 §3.5(8) 得出 $\|T\|^4 = \|T^*T\|^2 = \|T^{*2}T^2\| = \|T^2\|^2$,即

$$\|T^2\| = \|T\|^2;$$

归纳地有 $\|T^m\| = \|T\|^m (m = 2^n)$;$\forall n$,设 $m = 2^k > n$,则

$$\|T\|^n = \|T\|^m \|T\|^{n-m} = \|T^m\| \|T\|^{n-m} \leqslant \|T^n\|.$$

42. $\|T^*x\| = \|Tx\| \geqslant \beta\|x\| \Rightarrow T, T^*$ 皆为单射且 $R(T)$ 闭,因此

$$R(T) = {}^\perp N(T^*) = X, T \text{ 可逆}.$$

43. $0 \overline{\in} \sigma(I + iT) = 1 + i\sigma(T)$.

44. 用 $N(T) = R(T^*)^\perp$.

45. 注意 $S^*T = I$.

46. 令 $\lambda = \alpha + i\beta$,则 $\|T_\lambda x\|^2 = \|T_\alpha x\|^2 + \beta^2\|x\|^2 \geqslant \beta^2\|x\|^2$.

47. 否则 $\|T\| = r_\sigma(T) = 0$!

48. 将题 47 的结论用到 $T | A : A \to A$.

49,50. $T^* = -T \Leftrightarrow (iT)^* = iT$.

51. 若 $Tx = \lambda x, Ty = \mu y$,则 $\lambda\langle x, y\rangle = \mu\langle x, y\rangle$.

52. $Te_i = \alpha_i e_i$.

53. 若 $\lambda \in J, v \in L^2(J)$,则 $u(x) = v(x)/(\lambda - x)$ 不必属于 $L^2(J)$;

$$(\lambda - x)u(x) = 0, \text{a.e.} \Rightarrow u(x) = 0, \text{a.e.}.$$

54. $(e^{iA})^* = e^{-iA}$.

55. 注意 $T^* = A - iB, T^*T = A^2 + B^2 + i(AB - BA)$.

56. $A = (T + T^*)/2, B = (T - T^*)/2i$.

57. $\langle Px, x\rangle \equiv \langle Px, Px\rangle \equiv \langle P^*Px, x\rangle \Leftrightarrow P = P^*P \Leftrightarrow P = P^* = P^2$.

58. $A = P - P^*$ 是正规的,$\sigma(A) \subset i\mathbf{R}$,由 $A^{2n} = A^2$ 与 $A^{2n+1} = A$ 推出 $\sigma(A) = \{0\}$.

59. 注意 $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2$.

60. $TA \subset A \Rightarrow TP = PTP, TA^\perp \subset A^\perp \Rightarrow T(I - P) = (I - P)T(I - P)$.

61. 可设 $B^n \neq 0 (\forall n \geqslant 1)$,否则以 $B - \lambda I$ 代 B,$\lambda > 0$ 充分大.若 $AB - BA = I$,则 $AB^n - B^nA = nB^{n-1}$,这推出 $n\|B^{n-1}\| \leqslant 2\|A\| \|B\| \|B^{n-1}\|$!

62. 可设 $\lambda = 1, 1 \in \rho(AB) \Rightarrow I = I - BA + B(I - AB)^{-1}(I - AB)A = (I - BA)[I + B(I - AB)^{-1}A]$.

63. 设 $0 < |\lambda - \lambda_0| < R$.若 $\lambda_0 \in \sigma(T)$,则 $(\lambda - \lambda_0)^{-1} \in \sigma(R(\lambda, T))$(题 22),于是 $\|R(\lambda, T)\| \geqslant 1/|\lambda - \lambda_0|$,当 $\lambda \to \lambda_0$ 时 $\|R(\lambda, T)\|$ 无界.

64. 若 R_λ 可逆,则 $I = R_\lambda^{-1}[I + (\mu - \lambda)R_\lambda]R_\mu = R_\mu[1 + (\mu - \lambda)R_\lambda]R_\lambda^{-1}$;$T = \lambda I - R_\lambda^{-1} = \mu I - R_\mu^{-1}$ 与 λ 无关,$R_\lambda = R(\lambda, T)$.

65. 利用 §3.1(14).

66. 注意 $T \to T^*$ 是等距同构并利用 §3.2(5).

67. $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$ 在除负半实轴的平面上解析,$A = f(T)$ 满足 $A^2 = T$.

68. 令 $f(\lambda) = \ln\lambda$,类似于上题.

69. $f(\lambda) = \lambda g(\lambda)$,则 $f(T) = Tg(T) \in CL(X)$(用 2.9.4).

70. 类似于 3.4.6 之证.

71. 若 $x_n \to x, Tx_n \to z$,则必$\langle z - Tx, y\rangle = 0(\forall y \in X)$,然后用闭图象定理.

72. $(Ax, y) \equiv (x, Ay) \Leftrightarrow \langle TAx, y\rangle \equiv \langle Tx, Ay\rangle \Leftrightarrow TA = A^* T$.

73. $T \geqslant 0 \Rightarrow T = A^* A, A = T^{1/2}$.

74. 设$(\cdot, \cdot)$依题 72,则 $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{C}$ 有

$$0 \leqslant (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = |\alpha|^2(x, x) + \bar{\alpha}\beta(x, y) + \alpha\bar{\beta}(y, x) + |\beta|^2(y, y),$$

由 Hermite 二次型的性质得$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y)$.

75. 设$\{A_n\}$与$\{B_n\}$分别为依 §3.6(12) 构成的逼近 $T^{1/2}$ 与 $S^{1/2}$ 的迭代序列,则可归纳地验证 $A_n \leqslant B_n$.

76. $\|Sx\| \leqslant \|Tx\|$,$\{Tx_n\}$是 Cauchy 列 $\Rightarrow \{Sx_n\}$是 Cauchy 列.

77. 作从原点发出的射线 L,使 $L \cap \sigma(T) = \varnothing$,令 $\Omega = \mathbf{C} \setminus L$,则 $\ln\lambda$ 在 Ω 内解析,$\sigma(T) \subset \Omega$.令 $A = -\mathrm{i}\ln T$,则 $A = A^*$,$T = \mathrm{e}^{\mathrm{i}A}$.

78. 用 3.6.5 得出 Q_n 强收敛于 Q,$Q = Q^*$;$Q_n = Q_n^2 \Rightarrow Q = Q^2$.

79. 设 $T^* T \in CL(X)$,$x_n \rightharpoonup x$,则 $Tx_n \rightharpoonup Tx$,$T^* Tx_n \to T^* Tx$,这推出 $\|Tx_n\| \to \|Tx\|$,从而 $Tx_n \to Tx$.

80. 参考 2.9.6.

第四章

1. $\|F\Phi x - F\Phi y\| \leqslant \mathrm{Lip}F \|\Phi x - \Phi y\| \leqslant \mathrm{Lip}F \cdot \mathrm{Lip}\Phi \|x - y\| \Rightarrow \mathrm{Lip}(F \circ \Phi) \leqslant \mathrm{Lip}F \cdot \mathrm{Lip}\Phi$(与算子范数对照!).

3. 由 $\|F_n x - F_n y\| \leqslant \mathrm{Lip}F_n \|x - y\|$ 令 $n \to \infty$ 得 $\|Fx - Fy\| \leqslant \varliminf_n \mathrm{Lip}F_n \|x - y\|$,故 $\mathrm{Lip}F \leqslant \varliminf_n \mathrm{Lip}F_n$(与 §2.7(8) 对照!).

4. 以 x_{n-1} 作为初始点,迭代一次,用 §4.1(8).

5. 归纳地验明 $\|F^n x_0 - x_0\| \leqslant \rho$.

6. $\|F^m x_0 - F^n x_0\| \leqslant \sum_n^{m-1} \mathrm{Lip}F^k \|Fx_0 - x_0\|$;

$\|F^n x_0 - \bar{x}\| \leqslant \sum_n^{\infty} \mathrm{Lip}F^k \|Fx_0 - x_0\|$.

7. 取 $\bar{x} \in D$,使 $f(x) = \|x - Fx\|$ 在 $x = \bar{x}$ 取最小值.必 $f(\bar{x}) = 0$,否则

$$f(F\bar{x}) < f(\bar{x})!$$

9. 令 $Fu = TGu + v$,T 是以 K 为核的积分算子,$(Gu)(x) = g(u(x))$,则

$$\mathrm{Lip}F \leqslant \|T\| \mathrm{Lip}G \leqslant \|T\| \mathrm{Lip}g < 1 \text{(参考 2.2.4)}.$$

10. $F'(0)x = \left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}F(\alpha x)\right|_{\alpha=0}$.

11. 取定 $x \in \Omega, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \| F(x+h) - Fx - F'(x)h \| \leqslant \varepsilon \| h \|, \| F'(x)h \| \leqslant (\mathrm{Lip}F + \varepsilon) \| h \|$,这推出 $\| F'(x) \| \leqslant \mathrm{Lip}F + \varepsilon$.

12. $H''(x)hk = (G''(Fx)F'(x)h)F'(x)k + G'(Fx)(F''(x)hk)$.

13. 用链规则.

14. $T'(x,y)(h,k) = T(h,y) + T(x,k); T''(x,y)(h,k)(h_1,k_1) = T(h,k_1) + T(h_1,k), T'''(x,y) \equiv 0$.

15. $\| F(x,y) - F(\bar{x},\bar{y}) \| \leqslant \mathrm{const} \| y - \bar{y} \| + \| F(x,\bar{y}) - F(\bar{x},\bar{y}) \|$.

16. $F'(x) = \int_a^b f_x(t,x)\mathrm{d}t$.

17. $F'(u)h = \int_a^b f_x(t,u(t))h(t)\mathrm{d}t (u,h \in C(J))$.

18. 若 $f'(0) = \varphi, u_s(x) = sx$,则 $\dfrac{|f(u_s) - \varphi(u_s)|}{\| u_s \|_0} = \left| \dfrac{1}{2} - \dfrac{s}{|s|}\varphi(u_1) \right| \not\to 0 (s \to 0)$!

19. 用2.5.4:$\forall u \in X^*: \partial^r u(f(x))/\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}$ 与求导顺序无关.

20. $f''(x)h^2 = [\nabla f(x)h]'h, \nabla f(x)h = \sum \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}h_i$.

21. $A_{ij} = Q_i T J_j, Q_i: \prod Y_i \to Y_i$ 是投影,$J_j: X_j \to \prod X_j$ 是嵌人.

23. 将通常的 Taylor 公式用到函数 $\varphi(t) = f(x + th)(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

24. 用 Taylor 公式:

$$f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) = \frac{1}{2}f''(x + \theta h)h^2 \geqslant \frac{1}{2}[\lambda - \| f''(\bar{x} + \theta h) - f''(\bar{x}) \|] \| h \|^2.$$

25. 以 $R_n(h)$ 记 §4.2(9) 的积分余项,则 $\| R_{n-1}(h) \| \leqslant M \| h \|^n / n! \to 0 (n \to \infty)$.

26. 归纳证之.

27. 用链规则得:$(F^{-1})'(y)F'(x) = I, F'(x)(F^{-1})'(y) = I, y = Fx$.

28. 用4.3.3之证第3°段的方法.

29. 由 $F(x,f(x)) \equiv 0$ 有 $F_x h + F_y f'(x)h = 0 (h \in X)$.

30. 对 $\Phi(x,z,y) \triangleq F(x,y) - z = 0$ 用隐函数定理.

31. $\forall k \in \mathbf{N}: k = pn + i, p = [k/n], 0 \leqslant i < n, F^k x_0 = (F^n)^p F^i x_0$.

32. 必定 $\mathrm{Lip}F \leqslant r$;

$$\| x_n - \bar{x} \| \leqslant r \| x_n - \bar{x} \| + \| F_n \bar{x} - F\bar{x} \| \Rightarrow \| x_n - \bar{x} \| \leqslant \frac{\| F_n \bar{x} - F\bar{x} \|}{1 - r}.$$

33. 取 $x_0 \in D$,令 $F_n x = n^{-1}x_0 + (1 - n^{-1})Fx$,则 $\mathrm{Lip}F_n < 1$,于是有 $x_n = F_n x_n \in D$, $x_n - Fx_n \to 0$.

34. 若 F 在 x_0 邻近非 Lipschitz 映射,则有 $x_n, y_n \to x_0, \| x_n - y_n \| < 1/n, \| Fx_n - Fy_n \| > n \| x_n - y_n \|$.令 $t_n = \sqrt{n} \| x_n - y_n \|, y_n = x_n + t_n h_n$,则 $t_n^{-1} \| F(x_n + t_n h_n) - Fx_n \| > \sqrt{n}$.

35. $H'(x)h = T(F'(x)h, Gx) + T(Fx, G'(x)h)$.

36. 设 $\| x \| \leqslant 1, \| h \| < 1$,用 Taylor 公式:

$$\| F'(x)h \| = \left\| F(x + h) - F(x) - \int_0^1 (1 - t)F''(x + th)h^2 \mathrm{d}t \right\|.$$

37. 不妨设 $f(a) = 0$,然后推出在 (a,b) 内 $f(t) \equiv 0$.

38. 注意 $\| f'(x_0+h)-f'(x_0) \| = \sup\limits_{\|k\|\leqslant\delta} \frac{1}{\delta} \| f'(x_0+h)k - f'(x_0)k \|$.

39. 令 $T(x)=\sum F_n'(x), Fx=\sum F_n x$,验证

$$\| F(x+h)-Fx-T(x)h \| = o(\|h\|).$$

40. 令 $\varphi = F(x+h,y+k) - F(x+h,y) - F(x,y+k)+F(x,y)$,则
$\| F''(x)hk - F''(x)kh \| \leqslant \| \varphi - F''(x)hk \| + \| \varphi - F''(x)kh \| = o(\|h\|\|k\|)$.

41. 参考 4.4.3 之证.

42. 设 $\{x_n\} \subset A, (I-F)x_n \to x$,不妨设 $Fx_n \to y$,则 $x=(I-F)(x+y)$.

43. F 必为紧算子,因此可用 Schauder 不动点定理.

44. 令 C 为包含$\overline{FD}$ 的最小凸集,$B=C\cap D$,则 B 是紧凸集,$FB\subset B$,于是可用题 43 的结论.

45. 令 $D=\{u\in C(J): u\geqslant 0, \|u\|_1=1\}, Au=Tu/\|Tu\|_1$,对 $A:D\to D$ 应用题 44.

46. 不妨设 $Fx_n\to y, \lambda_n\to\lambda$,必定 $\lambda>0$,因此 $x_n\to x=y/\lambda, Fx=\lambda x$.

47. 若 $0\leqslant t<s\leqslant 1$,则

$$\varphi(s)-\varphi(t)=\frac{1}{s-t}\langle F(x+sy)-F(x+ty),(s-t)y\rangle \geqslant 0.$$

48. 设 $\exists\lambda>0: R(\lambda I+F)=X, \langle Fx-u, x-y\rangle\geqslant 0 (\forall x\in D)$.取 $x=R_\lambda(u+\lambda y)$ 代入得$\langle y-x, x-y\rangle\geqslant 0$,从而 $x=y, u=Fy$.

49. $\langle Fx-Fy, x-y\rangle \geqslant \|x-y\|^2(1-\mathrm{Lip}G)$.

50. ∇f是单调算子$\Leftrightarrow\forall x,y, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x+ty)=\langle\nabla f(x+ty),y\rangle$是增函数(参看题47)$\Leftrightarrow\forall x, y: t\to f(x+ty)$ 是凸函数$\Leftrightarrow f$ 是凸泛函.

名词索引

名词后的数字表示该名词首次出现的页码.

Arzela-Ascoli 定理 22
Baire 定理 23
Banach 空间 3
Brouwer 不动点定理 171
C^r 映射 159
Cauchy 列 3
Cauchy 不等式 10
Cayley 变换 140
Euclid 范数 1
Frechét 可微 159
Frechét 导数 159
Hahn-Banach 定理 63
Hilbert 空间 26
Hölder 不等式 7
Jacobi 矩阵 164
L^p 范数 6
L^p 收敛 6
Lax-Milgram 定理 127
Legendre 多项式 29
Lipschitz 算子 153
Lipschitz 模数 153
Minkowski 函数 89
Newton-Leibniz 公式 66
Parseval 等式 28
p 次平均收敛 6
Riesz 引理 21
Riesz 表示定理 59
Riesz-Schauder 理论 119
Schauder 基 14
Schauder 不动点定理 171
Schmidt 正交化方法 29
Schwarz 不等式 26
sup 范数 4
Taylor 公式 162
U 算子 124
Zorn 引理 89

1～2 画

一致有界原理 55
二次对偶 67
二次泛函 128

4 画

内部 11
内积公理 26
内积空间 26
开集 12
开集公理 33
开映射定理 52
双射 16
中线公式 26
中值定理 161
无界算子 45
分离定理 69
不变子空间 112
反函数定理 166

5 画

可分集 14
可分空间 14
可逆算子 101
正交系 27
正交补 27

正交坐标 29
正交分解定理 30
正则值 102
正投影 30
正规算子 124
正线性算子 175
正平方根 131
对偶空间 57
对偶锥 71
对偶算子 79
对称算子 138
凸集 68
半序集 88

6 画

闭包 11
闭集 13
闭算子 138
闭图象定理 54
全有界集 19
同胚 34
有界线性算子 45
有界线性泛函 57
有限秩算子 83
次线性泛函 63
次连续 176
向量序 72
自反空间 68
自伴算子 124
压缩算子 154
压缩映射原理 155
导算子 159

7 画

完备化 5
完备度量空间 32
投影 112
连续谱 139
严格单调算子 175

8 画

范数 2
范数公理 2
范数拓扑 34
拓扑 33
拓扑同构 5
拓空空间 34
拓扑直和 112
单射 16
单位算子 5
单调算子 175
单调有界收敛定理 131
邻域 11
极大原理 89
极大单调算子 176
非扩张算子 153
迭代法 155

9 画

绝对收敛 3
相对紧集 19
相伴算子 122
标准正交系 27
标准正交基 28
度量公理 31
度量空间 32
度量拓扑 34
保范延拓 64
逆算子定理 52
点谱 102

10 画

紧集 19
紧算子 169
紧线性算子 82
积空间 53
弱收敛 74
弱* 收敛 74
预解式 102

特征值 102
特征向量 102
特征子空间 102
根子空间 120
逐次逼近法 155

11 画

基本集 14
第一纲集 22
第二纲集 23
梯度 160

12 画

赋范空间 2
等距同构 5
等距嵌入 5
等价范数 5
等度连续 22
疏集 22
超平面 69
强收敛 74
强单调算子 175
剩余谱 139
链规则 160
隐函数定理 167

13 画及以上

稠集 14
满射 16
零空间 44
零化子 62
锥 71
算子范数 45
算子代数 101
算子幂级数 101
算子解析函数 106
谱 102
谱半径 102
谱半径公式 103
谱映射定理 110
谱分解定理 136
谱分解公式 136

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝泛函分析
作者＝
页数＝２０１
ＳＳ号＝０
出版日期＝

封面
书名
版权
前言
目录
正文